

Resultat från nationella provet i matematik kurs 1a och 1b

vårterminen 2022

Delrapport 2

Karin Axelson, Anna Efremova och Katarina Kristiansson

Rapport 2022:4

PRIM-gruppen
Institutionen för ämnesdidaktik



Stockholms
universitet

Innehåll

| | |
|--|----|
| Inledning | 3 |
| Analys av skriftliga elevlösningar | 3 |
| Sammanfattning..... | 11 |

Inledning

De nationella proven i matematik 1a, 1b och 1c konstrueras och utvecklas, på uppdrag av Skolverket, av PRIM-gruppen vid Stockholms universitet. I denna rapport presenteras en sammanställning och diskussion av resultaten för de nationella proven i matematik 1a och 1b som gavs vårterminen 2022. Det huvudsakliga syftet med rapporten är att redovisa och diskutera resultaten från genomförandet av dessa prov utifrån den revidering av ämnesplanen som genomförts. Resultatredovisningen från vårterminens nationella prov i matematik 1a och 1b kommer från PRIM-gruppens urvalsinsamling och bestod av lärarenkäter och inrapporterade resultat på uppgiftsnivå från ett slumpmässigt urval elever. PRIM-gruppens urvalsinsamling för matematik 1a omfattade vårterminen 2022 elever från olika yrkesprogram och för matematik 1b elever från samhällsvetenskapsprogrammet, ekonomiprogrammet, estetiska programmet och humanistiska programmet. Skolverket genomför enbart insamling av provbetyg på nationella prov för elevers avslutande matematikkurs i gymnasieskolan det vill säga för elever från de olika yrkesprogrammen som slutfört matematik 1a och för elever från estetiska och humanistiska programmet som slutfört matematik 1b. Resultaten från lärarenkäterna och elevresultaten på uppgiftsnivå är viktiga källor för analys och utvecklingen av de nationella proven. För matematik 1a bestod insamlingen från vårterminen 2022 av resultat från ca 600 lärare och ca 4 000 elever (ca 1 600 flickor respektive ca 2 400 pojkar) och för matematik 1b ca 550 lärare och ca 4 300 elever (ca 2 600 flickor respektive ca 1 700 pojkar). Resultatrapporten är uppdelad i två delrapporter. Detta är den andra delrapporten och den består av analyser av elevers prestationer på ett urval av uppgifter utifrån ett antal elevarbeten. Den första delrapporten innehåller resultat från prov och lärarenkäter¹.

Analys av skriftliga elevlösningar

Denna delrapport innehåller en fördjupad analys av elevlösningar till ett urval av uppgifter från de båda proven. Valet av uppgifter utgår från det nya innehållet i kursen och då inom området aritmetik, algebra och funktioner. De flesta uppgifterna har gått på båda proven och ett par av uppgifterna är unika för de enskilda kurserna. Efter respektive uppgiftsnummer anges från vilket prov (matematik 1a) eller (matematik 1b), som uppgiften kommer från. Om uppgiften har varit med i båda proven anges även det. Analysen utgår från ett slumpmässigt urval av 100 elevlösningar för respektive kurs. I analysen av elevlösningar har vi fokuserat på att undersöka vilka tänkbara utmaningar elever kan ha haft i förhållande till det centrala innehållet. Vi presenterar även lösningsproportioner och de vanligaste förekommande elevsvaren.

¹ Den första delrapporten publicerades i oktober 2022.

En uppgift om förenkling av uttryck

Uppgift 2 (matematik 1a)

Uppgiftstyp: Kortsvar utan digitala verktyg

Uppgiften, som var med i delprov B, handlade om att förenkla ett algebraiskt uttryck. Uttrycket bestod av termer som skulle adderas samt en produkt av ett positivt heltal och ett parentesuttryck. Uttrycket innehöll endast positiva termer och bestod av både konstanter och variabler. Uppgiften kunde ge en poäng och endast svaret bedömdes.

Lösningsproportionen på uppgiften var 0,32 ($n = 4034$) i PRIM-gruppens urvalsinsamling. I det slumpmässiga urvalet som ligger till grund för svarsanalysen var lösningsproportionen 0,33 ($n = 100$).

Det krävdes ingen redovisning på uppgiften men genom analys av de olika angivna svaren är det möjligt att resonera kring vilka troliga fel som kan ha gjorts. Det finns också elever som skrivit lösningar i sina häften trots att endast svaret behövde redovisas. Det vanligaste felsvaret tyder på att eleverna, utan att utföra multiplikationen, tog bort parenteserna i parentesuttrycket och sedan samlade variabeltermer och konstanter för sig. Ett annat felsvar tyder på svårigheter att använda prioriteringsregler. Elevsvaren indikerar att additionen utfördes före multiplikationen med parentesuttrycket eller så multiplicerades endast de termer som stod bredvid varandra i uttrycket. Analysen tyder på att det för dessa elever finns flera olika svårigheter när det kommer till att hantera uttryck med parenteser.

Tabell 1. Fördelningen av elevsvar vid analys av ett slumpmässigt urval av 100 elevarbeten för uppgift 2 (matematik 1a).

| | Andel av elevsvaren i % (1a) |
|--|------------------------------|
| Korrekt svar (1/0/0) | 33 |
| Felsvar, tar bort parenteser och samlar termer | 23 |
| Felsvar, prioriteringsregler | 11 |
| Felsvar, övriga | 29 |
| Inget svar | 4 |

En uppgift om faktorisering av uttryck

Uppgift 3 (matematik 1a) respektive uppgift 1 (matematik 1b)

Uppgiftstyp: Kortsvar utan digitala verktyg

Uppgiften, som ingick i delprov B på båda proven, var ett algebraiskt uttryck med två positiva termer där uttrycket skulle faktoriseras genom att bryta ut största möjliga faktor.

Uppgiften kunde ge en poäng och det var endast svaret som bedömdes.

Lösningproportionen på uppgiften var 0,15 ($n = 4034$) för 1a och 0,48 ($n = 4304$) för 1b i PRIM-gruppens urvalsinsamling. I det slumpmässiga urvalet som ligger till grund för svarsanalysen var lösningproportionen 0,13 ($n = 100$) för 1a och 0,56 ($n = 100$) för 1b.

I analysen av elevsvar kan man se att eleverna i relativt stor utsträckning hittar en eller båda faktorerna. Att sedan skriva uttrycket som en produkt av faktorer där en av faktorerna är ett uttryck med en parentes innebar en svårighet. Det finns också elevsvar som visar på svårigheter att se skillnaden mellan uttryck och ekvation och uttrycket behandlas som en ekvation. Detta kan bero på att eleverna är mer vana vid att lösa linjära ekvationer än att faktorisera uttryck.

Tabell 2. Fördelningen av elevsvar vid analys av ett slumpmässigt urval av 100 elevarbeten för uppgift 3(matematik 1a) respektive 1(matematik 1b).

| | Andel av elevsvaren i % (1a) | Andel av elevsvaren i % (1b) |
|---|------------------------------|------------------------------|
| Korrekt svar (1/0/0) | 13 | 56 |
| Felsvar, hittar någon eller båda faktorerna | 23 | 17 |
| Felsvar, löser som en ekvation | 8 | 7 |
| Felsvar, övriga | 23 | 14 |
| Inget svar | 33 | 6 |

En uppgift om exponentialfunktioner

Uppgift 6 (matematik 1a) respektive uppgift 3 (matematik 1b)

Uppgiftstyp: Kortsvar utan digitala verktyg

I uppgiften, som ingick i delprov B på båda proven, skulle ett funktionsuttryck skrivas utifrån ett givet startvärde och en procentuell förändring. Uppgiften avsåg att pröva begreppet exponentialfunktion. Uppgiften kunde ge en poäng och det var endast svaret som bedömdes.

Lösningproportionen på uppgiften var för 1a 0,16 ($n = 4034$) och för 1b 0,44 ($n = 4304$) i PRIM-gruppens urvalsinsamling. I det slumpmässiga urvalet som ligger till grund för svarsanalysen var lösningproportionen för 1a 0,13 ($n = 100$) och 1b 0,46 ($n = 100$).

I uppgiften krävdes endast en subtraktion för att bestämma förändringsfaktorn och i analysen av elevsvar var det endast någon enstaka elev som gjort fel på det. Ett vanligt felsvar tyder på att svårigheten i uppgiften låg i att teckna just en exponentialfunktion med x i exponenten. Ofta skrevs förändringsfaktorn korrekt, men multiplicerat med x och inte med x som exponent. Uppgiften innehöll signalordet minskning och ett annat vanligt felsvar var att funktionen uttrycktes som linjärt avtagande. Fler elever på 1b än 1a har skrivit x i exponenten även om startvärdet eller förändringsfaktorn var felaktig. Det fanns också en större variation av felsvar bland eleverna på 1a än på 1b.

Tabell 3. Fördelningen av elevsvar vid analys av ett slumpmässigt urval av 100 elevarbeten för uppgift 6 (matematik 1a) och 3 (matematik 1b).

| | Andel av elevsvaren i % (1a) | Andel av elevsvaren i % (1b) |
|--|------------------------------|------------------------------|
| Korrekt svar (1/0/0) | 13 | 46 |
| Felsvar, rätt förändringsfaktor, men multiplicerat med x . | 15 | 11 |
| Felsvar, linjär | 17 | 7 |
| Felsvar, exponentiell med fel förändringsfaktor eller startvärde | 8 | 15 |
| Felsvar, övriga | 37 | 19 |
| Inget svar | 11 | 2 |

En uppgift om räta linjens ekvation

Uppgift 18 (matematik 1b)

Uppgiftstyp: Redovisning utan digitala verktyg

I uppgiften i delprov C skulle eleverna ange en rät linje på formen $y = kx + m$ utifrån två givna punkter i koordinatform vilka linjen gick igenom. Uppgiften kunde ge två poäng. Den första poängen delades ut om eleven i sin lösning bestämt k - eller m -värdet. Den andra poängen delades ut för lösning med korrekt svar.

Lösningensproportionen på uppgiften var 0,51 ($n = 4304$) i PRIM-gruppens urvalsinsamling och i det slumpmässiga urvalet som ligger till grund för svarsanalysen var den 0,47 ($n = 100$).

För de elever som klarade av uppgiften var den absolut vanligaste lösningen att först beräkna k -värdet med hjälp av $\Delta y/\Delta x$, utifrån de två punkterna och sedan, med hjälp av $y = kx + m$ och en av punkterna, bestämma m -värdet och till sist sätta in k - och m -värdena i $y = kx + m$.

I de fall där 1 poäng erhöles på uppgiften hade eleverna uteslutande beräknat k -värdet med hjälp av $\Delta y/\Delta x$, utifrån de två punkterna. Därefter fanns lite olika vägar att gå fel. Det vanligaste felet var att x och y sattes in på fel plats vid beräkning av m -värdet. Andra exempel var att ekvationen för m -värdet inte löstes korrekt, att beräkningen av m -värdet inte redovisats eller att k - och m -värdena sattes in på fel plats, eller inte alls, i $y = kx + m$.

Analysen av elevsvar som inte erhöles någon poäng på uppgiften kan delas in i tre kategorier. I den första kategorin finns de elever som beräknar k -värdet felaktigt. I de allra flesta fall hade eleven beräknat $\Delta x/\Delta y$. I vissa fall gjordes sedan försök till att beräkna m -värdet men oftast utan framgång på grund av felaktig insättning av koordinater och/eller fel i efterföljande ekvationslösning. I den andra kategorin finns de elever som, med hjälp av punkterna, försökt att rita linjen i ett koordinatsystem. Ingen av de elever som försökt rita linjen har löst uppgiften. I den tredje kategorin finns en blandning av felsvar så som felaktig uppställning av $\Delta y/\Delta x$ följt av felaktig beräkning av detta samt olika försök att använda koordinaterna direkt i $y = kx + m$.

Tabell 4. Fördelningen av elevsvar vid analys av ett slumpmässigt urval av 100 elevarbeten för uppgift 18 (matematik 1b).

| | Andel av elevsvaren i % (1b) |
|--------------------------------------|------------------------------|
| Lösning med korrekt svar (2/0/0) | 34 |
| Beräknar k -värdet korrekt (1/0/0) | 25 |
| Felsvar, $\Delta x/\Delta y$ | 12 |
| Felsvar, försök att rita linjen | 10 |
| Felsvar, övriga | 13 |
| Inget svar | 6 |

En uppgift om mönster

Uppgift 17 (matematik 1a respektive matematik 1b)

Uppgiftstyp: Redovisning utan digitala verktyg

Uppgiften, som ingick i båda proven på delprov C, var en uppgift där omkretsen av en figur med liksidiga trianglar skulle undersökas för att upptäcka och beskriva ett mönster. Uppgiften bestod av fyra deluppgifter för 1a och fem deluppgifter för 1b, där de fyra första av deluppgifterna var gemensamma för de båda kurserna. Eleverna skulle först undersöka omkretsen av två givna figurer och sedan beskriva hur omkretsen ökade. I nästa deluppgift skulle en formel för hur omkretsen berodde av figurens nummer anges. Detta samband var exponentiellt. För 1b-eleverna fanns ytterligare en deluppgift där formeln skulle användas för att bestämma figurens nummer utifrån en given omkrets. Bedömningen gjordes med hjälp av en matris och uppgiften kunde ge totalt 7 poäng för 1a och 9 poäng för 1b.

Lösningensproportionen på uppgiften var för 1a 0,20 ($n = 4034$) och för 1b 0,25 ($n = 4304$) i PRIM-gruppens urvalsinsamling. I det slumpmässiga urvalet som ligger till grund för svarsanalysen var lösningensproportionen 0,18 ($n = 100$) för 1a och 0,21 ($n = 100$) för 1b.

Eftersom uppgiften bedömdes med en matris och poängen inte var knutna till en specifik deluppgift delades poängen ut utifrån beskrivningar som gavs i matrisen. Elever som till exempel fått två poäng på uppgiften kunde ha fått det dels för olika kunskaper och dels för olika sätt att visa kunskaperna på. I analysen av 100 elevsvar på respektive kurs kunde vi se några av de sätt eleverna löst uppgiften på, samt vissa problem eleverna stötte på i uppgiften.

I elevlösningarna framkommer att i princip samtliga elever försöker lösa uppgiften genom att påbörja bestämning av omkretsen av den första figuren. Endast ett par elever hoppar över uppgiften. Ungefär 60 % av eleverna på både 1a respektive 1b bestämmer omkretsen för den första figuren korrekt. Av de som påbörjar bestämning av omkretsen men inte gör det korrekt finns det några elever som kommer fram till ett svar som tyder på att de beräknar samtliga sträckor i figuren istället för att endast beräkna figurens omkrets. Omkretsen för figurerna i mönstret ökade exponentiellt och i en deluppgift skulle förändringen av omkretsen beskrivas med en förändringsfaktor. I själva beräkningen av förändringsfaktorn var det inte de ingående talen som var det största problemet för eleverna utan snarare att de saknade en metod för att beräkna förändringsfaktorn. Endast en femtedel av eleverna på 1a hade en metod för att beräkna förändringsfaktorn. Detta gällde oavsett om omkretsarna bestämts korrekt eller ej. Denna andel var dubbelt så stor på 1b, två femtedelar. I uppgiften bestod den sista deluppgiften (näst sista för 1b) i att bestämma en formel. Precis som i uppgift 6 (1a) och 3 (1b) i delprov B hade eleverna svårt att skriva ett uttryck för en exponentiell förändring och har istället angivit linjära uttryck. I dessa felaktiga linjära uttryck fanns ibland korrekt förändringsfaktor och startvärde. Detta förekom oftare på 1b än på 1a eftersom dessa elever kom längre i lösningen av uppgiften.

En uppgift om ekvationslösning

Uppgift 18b (matematik1a) respektive uppgift 20 (matematik 1b)

Uppgiftstyp: Redovisning utan digitala verktyg

Uppgiften, som ingick i båda proven på delprov C, var en linjär ekvation som skulle lösas. Lösningen skulle redovisas i provhäftet. Ekvationen innehöll multiplikation av två parentesuttryck i vänsterled. Parentesuttrycken bestod av två termer vardera där den ena parentesen innehöll en subtraktion. I båda led fanns efter förenklingen x^2 – termer, vilka skulle elimineras i ekvationslösningen. Uppgiften kunde ge två poäng. Den första poängen delades ut för förenkling i vänsterled genom multiplikation av parentesuttryck och för den andra poängen krävdes lösning med korrekt svar.

Lösningensproportionen på uppgiften var för 1a 0,11 ($n = 4034$) och för 1b 0,37 ($n = 4304$) i PRIM-gruppens urvalsinsamling. I det slumpmässiga urvalet som ligger till grund för svarsanalysen var lösningensproportionen 0,08 ($n = 100$) för 1a och 0,30 ($n = 100$) för 1b.

I analysen av de felaktiga svaren framkom att det vanligaste felsvaret, bland de elever som inte erhållit någon poäng, var att eleverna tog bort parenteserna utan att utföra parentesmultiplikation och sedan förenklade uttrycket genom att samla konstanttermer och variabeltermer för sig. Bland de elever som klarade att multiplicera parenteserna och erhöll en poäng fanns det elever som sedan gjorde fel i nästa steg i ekvationslösningen. Dessa fel varierade, bland annat hade eleverna svårt att hantera x^2 -termer som skulle subtraheras bort.

Tabell 5. Fördelningen av elevsvar vid analys av ett slumpmässigt urval av 100 elevarbeten för uppgift 18b (1a) och 20 (1b).

| | Andel av elevsvaren i % (1a) | Andel av elevsvaren i % (1b) |
|--|------------------------------|------------------------------|
| Lösning med korrekt svar (0/2/0) | 8 | 30 |
| Förenklar vänsterled genom att multiplicera parenteserna (0/1/0) | 4 | 15 |
| Felsvar, tar bort parenteser | 30 | 23 |
| Felsvar, övriga | 32 | 21 |
| Inget svar | 26 | 11 |

En uppgift om problemlösning med förändringsfaktor och algebra
Uppgift 26 (matematik 1a respektive matematik 1b)
Uppgiftstyp: Redovisning med digitala verktyg

Uppgift 26, som ingick i båda proven på delprov D, utgick från en triangel där vinklarna skulle bestämmas utifrån ett givet samband mellan vinklarna. Sambandet var angivet som en andel och för att lösa uppgiften behövdes detta samband tecknas. Uppgiften avsåg att pröva förändringsfaktor, algebra och problemlösning. Uppgiften kunde ge tre poäng. Den första poängen delades ut om eleverna påbörjade lösningen genom att teckna sambandet mellan vinklarna. Den andra poängen delades ut om eleverna löste uppgiften genom att pröva sig fram utifrån sambandet mellan vinklarna eller om de tecknade en ekvation. Den tredje poängen delades ut om eleverna sedan löste ekvationen och angav vinklarna korrekt.

Lösningensproportionen på uppgiften var för 1a 0,16 ($n = 4034$) och för 1b 0,44 ($n = 4304$) i PRIM-gruppens urvalsinsamling. I det slumpmässiga urvalet som ligger till grund för svarsanalysen var lösningensproportionen för 1a 0,13 ($n = 100$) och 1b 0,46 ($n = 100$).

Analysen av elevlösningar visade på flera olika svårigheter. En av svårigheterna var att uttrycka den ena vinkeln med en förändringsfaktor mindre än 1. Bland de elever som uttryckte vinklarna korrekt och kunde teckna en ekvation hade en del av dem svårigheter med att lösa ekvationen. Dessa svårigheter påminner om de vi sett i andra uppgifter, till exempel att elever samlar alla variabeltermer, utan att ta hänsyn till koefficienten framför. För att kunna lösa uppgiften behövde eleverna känna till vinkelsumman i en triangel. Vid analysen av elevlösningar visade det sig att drygt hälften av de elever som inte fått någon poäng på uppgiften på något sätt ändå visat kunskap om detta. De hade exempelvis ritat en triangel och skrivit 180 i den eller så hade de skrivit att summan av vinklarna är 180.

Tabell 6. Fördelningen av elevsvar vid analys av ett slumpmässigt urval av 100 elevarbeten för uppgift 26 (matematik 1a) och 26 (matematik 1b).

| | Andel av elevsvaren i % (1a) | Andel av elevsvaren i % (1b) |
|---|------------------------------|------------------------------|
| Lösning med korrekt svar (0/3/0) | 2 | 21 |
| Lösning genom prövning eller tecknar ekvation (0/2/0) | 0 | 6 |
| Tecknar uttryck för vinklarna (0/1/0) | 7 | 13 |
| Felsvar, övriga | 57 | 38 |
| Inget svar | 34 | 21 |

Sammanfattning

Samtliga uppgifter som analyserats kan kategoriseras inom området aritmetik, algebra och funktioner i det centrala innehållet för matematik 1a och 1b. I resultatrapportens första del ges exempel på vad inom detta område som är nytt för respektive spår. För både matematik 1a och 1b är de uppgifter vi valt att analysera elevlösningar till exempel på nya uppgifter inom detta område, även om någon av uppgifterna även kunnat förekomma innan revideringen och då framförallt i matematik 1b. Uppgifterna är också valda utifrån att de inneburit vissa svårigheter som var av intresse att undersöka närmare.

Området aritmetik, algebra och funktioner innebär flera utmaningar för många elever. Vår analys av 100 elevsvar från respektive spår i detta prov visar till exempel att elever som i matematik 1a inte kunnat förenkla ett algebraiskt uttryck inte heller klarar att faktorisera ett uttryck. Faktorisering, i form av att faktoruppdela tal i primtalsfaktorer, ingick i matematik 1b och 1c före revideringen av ämnesplanen. Att däremot faktorisera algebraiska uttryck är ett nytt innehåll i både matematik 1a, 1b och 1c.

I arbetet med algebraiska uttryck och ekvationer finns olika utmaningar. En del elever hanterar prioriteringsreglerna felaktigt och felsvaren indikerar brister i förståelse av begrepp som variabler och konstanter. Före revideringen ingick i matematik 1b och 1c att kunna skilja på begreppen ekvation, algebraiskt uttryck och funktion och i analysen av elevlösningar visade det sig vanligt förekommande att elever skriver om algebraiska uttryck till ekvationer. En annan utmaning i arbetet med algebraiska uttryck, ekvationer och funktioner är hantering av negativa tal och decimaltal, framför allt de mellan 0 och 1.

I lärarenkäten framkom synpunkter på att provet prövade geometri när det inte längre ingår i någon av kurserna. Uppgiften som avsåg att pröva förändringsfaktor, algebra och problemlösning utifrån vinklar i en triangel var en av uppgifterna som nämndes i lärarenkäten. Vinkelsumman i en triangel avses inte att prövas i matematik 1 utan är något som ingår i grundskolans kursplan. Precis som annat matematikinnehåll förväntas därför eleverna ha mött detta tidigare. I analysen av elevlösningar till uppgiften visade det sig att eleverna kände till vinkelsumman i en triangel, men svårigheten var att sedan teckna ett algebraiskt uttryck med hjälp av förändringsfaktor. Det var framförallt den förändringsfaktor som skulle skrivas som ett tal mindre än 1 som var svårast att uttrycka. En annan uppgift som kommenterades i lärarenkäten var uppgiften om mönster i delprov C. Kommentarna rörde bland annat språket i uppgiften, att uppgiften handlade om geometri samt uppgiftens svårighetsgrad. Vid analys av elevlösningar kan man se att de flesta eleverna försöker lösa uppgiften och visar att de har förståelse för de geometriska begreppen som krävs i uppgiften. Detta är återkommande i lösningar till uppgifter i provet där geometriska figurer eller begrepp finns med. Det som framförallt skapade svårigheter i uppgiften var att mönstret utvecklades exponentiellt. En del i processen att bestämma gränser för provbetyg på proven är att ett antal yrkesverksamma lärare uppskattar hur det förväntas gå för elever på uppgifterna. Vid en jämförelse av de värden lärarna skattade och elevernas resultat på denna uppgift

visar det sig att de elever som fått betyget E på provet har tagit i genomsnitt det antal poäng på uppgiften som skattades av lärarna.

