Elevers användning av strategierna specialisering, generalisering, gissning och övertygande

Makarim Al-Najem

Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik

Naturvetenskapsämnenas didaktik, självständigt arbete, UM9008, 30 hp

Matematikämnets didaktik

Masterprogram i matematikämnets didaktik, 120 hp

Vårterminen 2022

Handledare: Iben Maj Christiansen

Examinator: Anna Pansell

English title: Students' use of the strategies of specializing, generalizing, conjecturing, and convincing.

Stockholms universitet

Elevers användning av strategierna specialisering, generalisering, gissning och övertygande

Makarim Al-Najem

Sammanfattning

Detta forskningsprojekt handlar om att studera processerna för elevers matematiska tänkande på högstadiet under matematiklektionen. Matematiskt tänkande ses som en social aktivitet. Ur ett socialt perspektiv skulle det ses som en händelse, interaktion och kommunikationsmetoder. När elevernas engagerar sig i samtalet för att lösa matematiska problem, tolkas deras aktiviteter, handlingar och förklaringar som synliga tecken eller uttryck för deras matematiska tänkande. Här har jag argumenterat både för relevansen av att fokusera elevernas matematiska tänkande som det utvecklas i deras argumentation när de arbetar med undersökande arbetssätt, och av att använda sig av lärarforskning. Genom klassrumsobservation fick jag titta närmare på aspekter som påverkar tankeprocesserna. Syftet med denna studie är att identifiera och analysera elevernas matematiska tankeprocesser specifikt på specialisering, generalisering, gissning och övertygande, som de uppvisar i sina samtal. Data i studien samlades in i samband med genomförande av fyra aktiviteter som jag utarbetat, elevers samtalsinspelning, en enkätundersökning som hölls efter genomförande av två aktiviteter och genom klassrumsobservationer. Eleverna samtalade lösningar i mindre grupper. Lösningsförslag presenterade grupperna för varandra under matematiklektionen. Elevernas samtal analyserades sedan enligt de specifika egenskaper som identifierats som en nyckel till matematiskt tänkande. Jag fann att eleverna använder processerna för matematisk tänkande i sitt resonemang och att det finns skillnader på aspekterna mellan dessa processer beroende på informationen som är kopplad till problemet, urvalet av illustrationer baserades på ämnesperspektiv och erfarenheter. Resultatet visade också att det finns en koppling mellan dessa processer och ökade medvetenhet och lärande. Genom denna studie kan slutsatser dras om att lära sig specifika processer som specialisering, gissning, generalisering och övertygande ökar medvetenheten om hur eleverna tänker som sedan används för att anpassa undervisning för eleverna. En beskrivande modell för matematiskt tänkande presenteras och används sedan för att ge ett praktiskt svar på forskningsfrågorna. Forskningsresultat kan således används av både lärare och lärarstudenter som en modell när de planerar undervisningen.

Nyckelord: Matematiskt tänkande, tankeprocesser, specialisering, generalisering, gissning, övertygande och klassrumsobservation.

Innehållsförteckning

Inledning

Denna empiriska studie undersöker processerna i det matematiska tänkandet under matematiklektionen. Matematiskt tänkande är ett viktigt mål för skolan, är ett viktigt sätt att lära sig matematik på och är viktigt för att lära ut matematik (Stacey, 2015). Baserat på den sista punkten är det produktivt att se undervisning i matematik som ett annat exempel på att lösa problem med matematik (Stacey, 2015). Här betonas inte kunskap som används statiskt i lektionen, utan en redogörelse av undervisning som betonar det dynamiska matematiska beslutsfattande som sker. Om läraren ska genomföra en lektion som når sina matematiska mål på ett sätt som är lyhört för elevernas tänkande, och särskilt om de ska uppmuntra elevernas matematiska tänkande, måste de själva ägna sig åt matematiskt tänkande under lektionen (Stacey, 2015).

Att kunna använda matematiskt tänkande för att lösa problem är ett av de mest grundläggande målen för matematikundervisningen, men det är också ett av de mest svårfångade målen (Stacey, 2006). Och för att eleverna ska kunna utföra matematiska undersökningar för att kunna identifiera var matematiken de har lärt sig är tillämpbar i verkliga situationer (Stacey, 2006). Om eleverna ska bli goda matematiska tänkare måste matematiskt tänkande vara en framträdande del av deras utbildning (Stacey, 2006). När eleverna arbetar mot en lösning har vi, enligt Stacey (2006) många möjligheter att observera matematiskt tänkande i handling. Stacey (2006) menar att detta illustrerar en nyckelkomponent i matematiskt tänkande att ha en benägenhet att se världen på ett matematiskt sätt, och en attityd att söka efter en logisk förklaring. Dessutom kommer dock de elever som har en förståelse för komponenterna i matematiskt tänkande att kunna använda dessa förmågor självständigt för att förstå den matematik de lär sig (Stacey, 2006). Medan lärare runt om i världen har betydande framgångar med att nå detta mål, särskilt med duktigare elever, finns det alltid ett stort behov av förbättringar, så att fler elever får en djupare uppfattning om vad det innebär att tänka matematiskt och att använda matematiken till hjälp i vardagen och arbetslivet (Stacey, 2006).

Vidare relaterade elevtänkandedimensionen till en ökande kvalitet på elevtänkande som innefattade resonemang och motivering av matematiska idéer (Wood m.fl., 2006). Wood m.fl. (2006) definierade matematiskt tänkande som den mentala aktivitet som är involverad i abstraktionen och generaliseringen av matematiska idéer.

Matematiskt tänkande beskrivs som en modell i termer av operationer, processer och dynamik (Burton, 1984). Enligt Burton (1984) handlar det matematiska tänkandet inte om ämnet matematik, utan det är ett tankesätt som är en funktion av speciella tankeaktiviteter. Hon hävdar att det finns skillnad mellan det matematiska innehållet och de processer som eleverna går igenom för att lösa problem (Burton,1984). Dessa processer specialisering, gissning, generalisering och övertygande kan visa sig vara centrala för matematiska aktiviteter och är nödvändiga för att förstå och använda idéerna (Burton, 1984). Det är matematiskt inte för att man tänker på matematik utan för att operationerna som det bygger på är matematiska (Burton, 1984). Matematiskt tänkande är ett tankesätt genom vilket vi klassificerar, kombinerar, relaterar och transformerar information (Burton, 1984). Enligt Burton kan en idé, en observation, en händelse eller vad som helst ge en stimulans att börja tänka. Sådana händelser är inslag i matematiskt tänkande (Burton, 1984).

På 1970 - talet och i början av 1980 - talet fanns det ett stort intresse för de "processer" varmed saker gjordes, och att tänka matematiskt är ett bra exempel på detta (Mason m.fl., 2010). Att tänka matematiskt handlar om matematiska processer, och inte om någon särskild gren inom matematiken (Mason m.fl., 2010). Det gäller att tänka på de existerande tankesätt och förmågor som eleverna tar med sig till klassrummet, uppgiften att lära ut blir då att uppmuntra eleverna att använda och utveckla sina förmågor inom ramen för matematiskt tänkande (Mason m.fl., 2010).

Mitt fokus var att förstå egenskaper för matematiskt tänkande utifrån de fyra tankeprocesserna för att uppmuntra eleverna att använda och utveckla sin tilltro till sin egen förmåga att lösa matematiska problem. Det var viktigt för mig att identifiera och tydligt kommunicera mina förväntningar i klassrummet för att undersöka elevernas existerande tänkande som det manifesterar sig i deras interaktioner, som ett led i att lägga grunden för att kunna utveckla egen undervisning inom detta prövade jag problemlösningsaktiviteter i matematiklektionen med ett antal elever för att kunna analysera elevernas tankar (idéer) i några illustrativa exempel under problemlösningssituation. Jag valde att studera och undersöka de matematiska tankeprocesser som kan hjälpa eleverna att hitta en modell för att närma sig problemlösning. Eleverna fick flera tillfällen att arbeta tillsammans i små grupper och diskutera olika strategier att lösa matematiska problem genom samtalen och interaktionerna. Även om det är allmänt accepterat att skillnader i klassrummet interaktion påverkar elevernas matematiska tänkande, finns det lite forskning som undersöker sambandet mellan specifika interaktionsmönster och elevtänkande (Wood m.fl., 2006).

I denna studie hade jag för syfte att studera strategier och nyckelegenskaper för matematiskt tänkande för att kunna identifiera processerna för matematiskt tänkande. Finns ett sådant fokus i matematikundervisning? Med bakgrund av detta analyserade jag barns matematiska tänkande som verbaliserat inom en grupp, till skillnad från att tänka enskilt eller ensamt (Wood m.fl., 2006).

Denna studie belyser hur lärare kan granska elevers strategier och de tankeprocesser de använder för att komma fram till svaret när de arbetar tillsammans med problemlösning. Detta innebär att man behöver märka det som sker i klassrummet, att vara närvarande och känslig i stunden, att ha en anledning att agera och att ha en annan handling att tänka på (Mason, 2002). Följaktligen är en viktig aspekt av att vara professionell att lägga märke till möjliga handlingar att testa i framtiden, oavsett om de är hämtade från läsning, från diskussion, från att titta på andra eller från personlig reflektion (Mason, 2002).

Aktionsforskning som modell

När jag sökt och läst litteratur om ”matematiskt tänkande”, fanns det många studier som beskriver betydelse av klassrumsobservation för att förstå elevernas matematiskt tänkande (Barnhart & van Es, 2015; Miller, 2010; Sherin m.fl., 2011; van Es & Sherin 2008; van Es & Sherin, 2021). Jag hade tänkt då på de metodologiska aspekter och sättet att identifiera och analysera elevernas tankar och dessa strategier de använder för att lösa problemen. Hur man tolkar det man ser och hör, och hur man reagerar bäst (Ball & Cohen, 1999).

Därför placerades denna studie i en aktionsforskningsmodell för att möjliggöra användningen av alla typer av data som samlas in från undersökning och analysen av det matematiska tänkande hos eleverna under matematiklektionen. Aktionsforskningen i sig har en enorm litteratur och ett brett utbud av detaljerade metoder för genomförande (Mason, 2002).

Ett antagande som ligger till grund för syftena med aktionsforskning och skälen till att lärare ägnar sig åt aktionsforskning är att det i slutändan kommer att resultera i en förbättring av utbildningen, vilket innebära bland annat mer rättvisa möjligheter att lära sig för alla elever (Feldman, 2002). Enligt Feldman läraren måste ta hänsyn till situationen. När detta inträffar ser vi undervisning som en avsiktlig aktivitet (Feldman, 2002). Genom att göra detta, läraren erkänner att allt omkring henne har en mening som uppstår ur situationen, inklusive hennes eget sätt att vara, som i sig uppstår genom erfarenhet (Feldman, 2002).

Aktionsforskning integrerar processerna för pedagogisk transformation och teorigenerering (Elliot, 1994). Elliot (1994) menar att genom aktionsforskning problematiseras teoretikers idéer. En sådan process kan erbjuda möjligheten att förbättra kvaliteten på sina elevers inlärningsupplevelser (Elliot, 1994).

Etiska hänsyn

Deltagande elever och deras vårdnadshavare tillfrågades och informerades i förväg om projektet och syftet. Skriftligt samtycke från samtliga vårdnadshavare till medverkande elever samlades in innan genomförande. Deltagande informerades att observationer kommer att anonymiseras i arbetet, så att det inte går att identifiera grupperna eller enskilda individer. Antalet deltagare kommer därför inte att anges i uppsatsen av etiska skäl. Informationen skickades hem och gavs under ordinarie matematiklektion. Samtliga deltagande tackade ja till medverkan i studien.

Klassrumsobservation

Denna studie ramas in av forskning om reflektion, lärares observation och lektionsanalys. Klassrumsobservation är en viktig del av denna studie och innebär att iaktta och skaffa sig kunskaper om hur eleverna tänker.

En central komponent i studien var att lära sig att använda bevis på elevers tänkande när det utvecklas under lektionen (Barnhart & van Es, 2015). Den systematiska analysen av undervisningen hänvisas till att visa större uppmärksamhet på detaljerna i elevers tänkande, används som bevis på klassrumsinteraktion för att dra slutsatser om elevers lärande och för att fatta instruktionsbeslut baserat på lärares uppmärksamhet och analys av elevers tänkande (Barnhart & van Es, 2015). Denna analys grundades av tidigare forskning om läraruppmärksamhet, lektionsanalys och lärares reflektion (Burton, 1984; Mason m.fl., 2010; Stacy, 2006).

Att utforma forskning för att förstå elevers motivation att lära, deras minne och organisation av domänspecifik kunskap och deras mönsterigenkännbarhet är inte lätt (Berliner, 1994). Även om problem kan klassificeras och lösningsstrategier föreslås baserat på tidigare erfarenheter, genom märkning och uppgiftsanalys, kunde experter oftare förutsäga vilka typer av misstag elever skulle göra när de försöker svara rätt, vilket ger en bättre förståelse för elevernas tänkande. (Berliner, 1994). Enligt Berliner krävs en uppgiftsanalys av problemet som representeras i objektet, uppenbarligen för att se djupare in i karaktären av de problem som eleverna kan uppleva. Berliner (1994) menar att uppgiftsanalys kan kodas högt i sinnet när lärare verbaliserar något om orsakerna till ett objekts svårigheter eller när lärare spårar de olika steg eller färdigheter som en elev skulle behöva för att svara på ett ämne korrekt.

Forskning har utvecklat viktiga dimensioner av hur lärare observera, hur observation fungerar under undervisningen och vad det handlar om när lärare lär sig. Lärare är med andra ord inte bara passiva åskådare i akten att märka, de formar snarare interaktioner för att få tillgång till ytterligare information för att möjliggöra ytterligare observation och tolkning av elevers tänkande (van Es & Sherin, 2021).

Klassrumsobservation i relation till aktionsforskning

Eftersom observation anses vara teoriladdade, varför inte använda observation för att avslöja, utmana och modifiera dessa teorier, inte som en extern aktivitet, utan inom praktiken (Mason, 2002). Mason (2002) beskriver det som en handling av uppmärksamhet, och som sådan är inte något man kan bestämma dig för att göra helt plötsligt. Till skillnad från många uttryck för aktionsforskning betonar observation som forskning där samma person som gör planeringen, förberedelserna, experimenterandet, observationen av effekter, utvärderingen av resultat och reflektionen med stöd av kollegor, allt genom att följa upp sina egna deltagande genom att utveckla sitt inre vittnesbörd (Mason 2002). Det finns dock alltid den extra dimensionen att datainsamling sker i en situation där man är känd för de andra inblandade, där man har en befintlig roll, skyldigheter, ansvarsförväntningar (Winter, 1998).

Även Gebhard & Oprandy (1999) diskuterade principer som ligger till grund för systematisk icke-dömande observation, de förklarade och illustrerade processen för att beskriva, analysera och tolka undervisning, samt sättet att generera alternativa undervisningssätt. Enligt Gebhard & Oprandy (1999) bygger observation av eleverna alltid på idén att ju mer erfarenhet vi har av reflektion i handling, desto lättare blir det att reflektera i handling. Tanken är att upptäcka vad vi normalt gör och att försöka motsatsen för att se vad som händer. Gebbard & Oprandy (1999) menar att lärare måste gå längre än att försöka lösa problem i vår undervisning genom att ta olika vägar till medvetenhet.

I nästa kapitel utvecklar jag först det teoretiska ramverket för studien, eftersom en del av detta går igen i sammanfattningen av den tidigare forskningen – det därpå följande kapitlet. På bakgrund av dessa två kapitel formulerar jag studiens syfte och frågeställning, varefter jag presenterar mina metoder i detalj. Slutligen följer resultat och diskussion.

Teoretiskt ramverk

Enligt Schoenfeld (1992) matematik en social aktivitet i sig, baserad på observation, studier och experiment, för att bestämma naturen eller principerna för regelbundenhet i system definierade axiomatiskt eller teoretiskt ("ren matematik") eller modeller av system abstraherade från verkliga objekt ("tillämpad matematik"). Schoenfeld beskriver matematik som ett levande ämne som innebär att försöka förstå mönster som genomsyrar både världen omkring oss och sinne inom oss.

Även om matematikens språk bygger på regler som måste läras, är det viktigt för motivationen att eleverna går bortom regler för att kunna uttrycka saker på matematikens språk (Schoenfeld, 1992). Han beskriver denna transformation som förändringar i instruktionsstil och ansträngningar att fokusera på att

- söka lösningar, inte bara memorera procedurer,
- utforska mönster, inte bara memorera formler,
- formulera gissningar, inte bara göra övningar (Schoenfeld, 1992).

När undervisningen börjar spegla dessa betoningar kommer eleverna att ha möjligheter att studera matematik som en utforskande, dynamisk, utvecklande disciplin snarare än som en stel, absolut, sluten samling lagar som ska memoreras (Schoenfeld, 1992).

Schoenfeld (1992) gav en väl ramverk, efter en granskning av litteraturen. Han föreslog fem aspekter. Dessa är kunskapsbasen, problemlösningsstrategier, övervakning och kontroll, tro och påverkan och praxis. Dessa fem kategorier utgör ramen att studera matematiskt tänkande (Schoenfeld, 1992).

Liknande ram gavs av Mason m.fl. (2010) som har delat in problemlösningen i tre faser: Inträde, attack och granskning. Dessa faser är relaterade till den matematiska tankeprocessteorin uttryckt av Mason m.fl. (2010) som består av specialisering, generalisering, gissning och övertygande.

Förutom Schoenfeld (1992) och Mason m.fl. (2010) hittade ett liknande ramverk från den tidigare litteraturen om problemlösningsstrategi (Polya, 1973). Jag kommer att använda dessa teoretiska ramverk i dataanalysen för att relatera de identifierade tankeprocesserna och dessa strategier till de olika problemlösningsfaser som eleverna går igenom under problemlösningssituationen.

Ramverkets struktur framgår av tabell 2. Tabellen är en förenklad representation av ramverket som visar en jämförelse av olika modeller med vilka verktyg matematiskt tänkande studeras, och hur egenskaper och tillstånd finns i studien. Genom detta teoretiska ramverk vill jag erbjuda ett verktyg som kan hjälpa lärare och forskare att studera elevers matematiska tänkande, och ännu viktigare, att känna igen de aspekter som kan hjälpa elever att utveckla sitt matematiska tänkande.

Det matematiska tänkandets operationer

Enligt Burton (1984) framställs matematik som en sluten manipulation av symboler, medan matematiskt tänkande är närmare kopplat till öppen undersökning. Att lösa en fråga på ett tillfredsställande sätt innebär att hitta ett tydligt samband mellan ett underliggande mönster i vad man vet och vad man vill komma fram till (Mason m.fl., 2010). Till exempel när eleverna ställs inför en fråge eller ett problem, ett kraftfullt sätt att utforska dess innebörd är genom att undersöka specifika exempel, sådan är en specialisering och är nyckeln till ett induktivt förhållningssätt som är naturligt för barns lärande (Burton, 1984).

Den matematiska karaktären av detta tänkande skulle av alla lärare uppfattas som en uppräkning (Burton, 1984). Men lika matematiskt är tänkande nödvändigt för upprepning, eller iteration, eftersom det beror på mönsterigenkänning och fortsättning (Burton, 1984). Burton beskriver dynamiken i matematiskt tänkande som en spiralformad förlängning av ett verk. I en sådan representation går dynamiken i matematiskt tänkande genom rörelser runt eller mellan ett ospecificerat antal loopar, varje ny loop reflekterar över förståelsen och medvetenheten som uppnåtts genom att gå igenom tidigare loopar (Burton, 1984). En klyft mellan vad som faktiskt förväntas hända framkallar spänning tills någon känsla av mönster eller prestation, förundran, glädje eller vidare bearbetning (Burton, 1984). Även om känslan av vilken manipulation som krävs tills känslan kan uttryckas genom en artikulation (Burton, 1984).

Att manipulera, få en känsla av mönster och artikulera beskriver de kognitiva aktiviteter som driver matematiskt tänkande (Burton, 1984). Den kognitiva nivån kartläggs av affektiva reaktioner som kan observeras passera genom tre faser: inträde, attack och granskning (Burton, 1984; Mason m.fl., 2010).

Tankeprocesser

Burton (1984) och Stacey (2006) delar in processerna för matematiskt tänkande i fyra kategorier, specialisering, generalisering, gissning och övertygande.

Specialisera: Innebär att pröva special fall (Stacey, 2006). Varje exempel ger möjlighet att manipulera element som är konkreta i barnets tänkande, oavsett om det är fysiska manifestationer eller idéer (Burton, 1984).

Gissa: Innebär att förutsäga relationer och resultat (Stacey, 2006). Det är en hypotes och innebär att undersöka några specifika fall, när tillräckligt många sådana exempel har undersökts. Gissningar om förhållandet som förbinder dem sker nästan automatiskt. Genom gissningar utforskas, uttrycks och underbyggs en känsla av alla underliggande mönster (Burton, 1984).

Generalisering: Innebär att leta efter mönster och relationer (Stacey, 2006). Ett erkännande av mönster eller regelbundenhet provocerar uttalandet om generalisering. Sådana uttalanden verkar vara de byggstenar som eleverna använder för att skapa ordning och mening ur en överväldigande mängd sinnesdata, och det är på sådan generalisering som mycket beteende beror fokus i (Burton, 1984).

Övertygande: Innebär att kommunicera orsaker till att något är eller upplevas som sant (Stacey, 2006), en generalisering måste testas tills den är övertygande. Den övertygande processen är det sätt på vilket en generalisering går från att vara personlig till att vara offentlig. Övertygande-processen kan även pågå i den sociala interaktionen och sedan internaliseras. En bild av det deduktiva tillvägagångssättet erhålls genom att invertera ordningen på processerna. Börjande med en generalisering, utforskar man nätet av gissningar det framkallar och testar dem mot specialiseringar. (Burton, 1984).

Med avseende på sekvenserna för processerna i det matematiska tänkandet. Stacey (2006) påvisade empiriskt två par processer genom vilket matematiskt tänkande ofta går fram. Det är specialisering och generalisering som det ena process-par, och gissning och övertygande som det andra.

Tidigare forskning

Detta kapitel presenterar en genomgång av den relevanta forskningen med fokus på att förstå elevers matematiska tänkande. Källorna till granskning är studier gjorda under de senaste trettio åren. Dessa studier fokuserade i hög grad på att förstå och analysera elevers matematiska tänkande i samband med problemlösningssituation (Mason m.fl., 2010; Schoenfeld, 1992; Stacey, 2006). Jag valde två olika perspektiv för denna granskning. Den ena är det sociala klassrumsinteraktion (Hino, 2015; Mata-Pereira & da Ponte, 2017; Sfard & Kieran 2009; Varhol m.fl., 2021; Webb m.fl., 2021) och den andra perspektiv är elevernas användning av den tidigare inlärda kunskaper (Chinnappan, 1998; Franke m.fl., 2001; Isoda & Katagiri, 2012; Jones m.fl., 1997; Li & Schoenfeld, 2019; van Es & Sherin 2008).

Majoriteten av tidigare studier bidrog till en bättre förståelse av matematiskt tänkande och innebar en detaljerad analys av enskilda elevers problemlösning (Goos & Kaya, 2020).

Baserad på den första perspektivet genomförde Sfard & Kieran (2009) en studie där de tittade närmare på det populära påståendet att många skolämnen och matematik bland dem bäst lärs in på ett interaktivt sätt genom samtal med andra. I studien använde Sfard & Kieran (2009) två typer av speciella framtagna analytiska verktyg för att analysera data som kom från två månader lång serie av interaktioner mellan två 13 åriga pojkar som lär sig algebra. Enligt Sfard & Kieran (2009) gav fokus på analysen en detaljerad bild av elevernas samtal på nivån av dess omedelbara matematiska innehåll och gjorde det möjligt att bedöma effektiviteten i kommunikationen. Med hjälp av speciella analysverktyg drog Sfard och Kieran (2009) slutsatser som förändrade deras syn på lärande genom att tala, och som också tvingade dem att revidera några av de grundläggande antagandena de började med studien, samtidigt som de tittade noga på de två elever som arbetade tillsammans, insåg de att fördelarna med att lära sig genom att tala inte kan tas för givet (Sfard & Kiran, 2009).

I en studie i Tokyo undersökte Heino (2015) hur japanska gymnasieelever engagerade sig i de strukturerade problemlösningslektionerna. Hino (2015) försökte förstå hur eleverna lyssnar på flera lösningar som har föreslagits av deras klasskamrater under jämförelseaktiviteten. I studien ombeds tjugofyra elever att spela in video under lektionerna och även att identifiera och kommentera sina betydande klassrumshändelser i de videostimulerade intervjuerna efter lektionen. Elevernas kommentarer om situationen klassificerades i fem koder för att jämföra flera lösningar, som visade att de lyssnar på flera lösningar på olika sätt utifrån sin tankeprocess och produkten av den tidigare individuella problemlösningen (Hino, 2015).

I en annan studie presenterade Mata-Pereira & da Ponte (2017) design principer för en intervention fokuserad på att tackla resonemangsprocesserna och fokusera på en helklassdiskussion i årskurs sju om linjära ekvationer och funktioner. Ett bevis är en sammanhängande sekvens av påståenden som inkluderar en uppsättning accepterade påståenden, former av resonemang och sättet att representera argument, förutsatt att resonemang är centralt för att bevisa och syftar till att utveckla kunskap om hur lärares handlingar kan främja elevers matematiska tänkande (Mata-Pereira & da Ponte, 2017). Studien beskriver principerna för designforskning där matematiska diskussioner under hela klassen genomfördes för att förbättra grundskoleelevers matematiska resonemangsprocesser. Deras Dataanalys refererade till lärares agerande i förhållande till design principer och till de eftertraktade matematiska resonemangsprocesserna. Slutsatserna de belyste var lärarens agerande som får eleverna att generalisera och motivera. Enligt Mata-Pereira & da Ponte (2017) generaliseringar kan uppstå från en central utmanande handling eller från flera vägledande åtgärder. När det gäller motiveringar tycks en huvudsaklig utmanande åtgärd vara väsentlig, medan uppföljande vägledande åtgärder kan främja en vidareutveckling av tankeprocesserna (Mata-Pereira & da Ponte, 2017).

Matematiska tänkandet har studerat bland annat av Varhol m.fl. (2021) som fokuserade på att studera öppet hur framsteg i matematiskt tänkande kan relatera till diskursen, dessa studerades separat. Deltagande i studien var elever i årskurs åtta som arbetade i grupp för att lösa en uppgift om att generalisera mönster. Varhol m.fl. (2021) studerade framstegen i matematiskt tänkande genom att inspektera hur grupperna utvecklades genom olika generaliseringsnivåer. Diskursen studerades genom att karaktärisera varje elevinteraktion. När Varhol m.fl. (2021) kombinerade dessa insåg de att vissa specifika typer av interaktioner var relaterade till elevernas framsteg till en högre generaliseringsnivå. Varhol m.fl. (2021) kallade dessa nyckelinteraktioner, som huvudsakligen var av typen förespråkande, lokalisering och omformulering. Dessa interaktioner verkade tydligt viktiga för att identifiera bevis på framsteg under diskurserna (Varhol m.fl., 2021).

En annan studie gjordes av Webb m.fl. (2021) som studerade med hjälp av djupgående analyser av videofilmade helklassdiskussioner, samarbetsarbete i små grupper och privata partnersamtal i två matematikklassrum i tredje klass vid sex tillfällen under en femmånadersperiod. Studien visade de framsteg som eleverna gjort i sitt matematiska tänkande eller matematiskt arbete i samband med att förklara sitt tänkande och eller engagera sig i andras idéer. De detaljerade analyserna som gjordes av Webb m.fl. (2021) fokuserades på elever som tidigare fått låga poäng på standardiserade prov av matematikkunskaper. Resultaten visade hur elever som inte anses ha omfattande matematikkunskaper kan skapa nya kopplingar mellan matematiska idéer och representationer och utöka sina problemlösningsstrategier på sätt som är direkt relaterade till deras deltagande (Webb m.fl., 2021).

När det gäller det andra perspektivet ” elevers användning av den tidigare inlärda kunskaper ” var flera forskare i de tidigare studier mer angelägna om att utveckla en förståelse för matematiskt tänkande, till exempel Chinnappan (1998) som fokuserade på en fråge som rör elevers förmåga att ta del av och flexibelt använda tidigare inlärda kunskaper. Chinnappan (1998) använde en schemateori för att undersöka den organisatoriska kvaliteten på elevernas tidigare geometriska kunskaper och användningen av de kunskaperna under problemlösning. Studien genomfördes med gymnasieelevers. Den strukturell analys av resultaten tydde på att kvaliteten på geometriska kunskaper som eleverna utvecklar kan ha en kraftfull effekt på deras mentala modeller och efterföljande användning av kunskaperna (Chinnappan, 1998).

Baserat på en syntes av litteraturen och observationer av små barn över två år, Jones m.fl. (1997) formulerade och utvecklade ett ramverk för att bedöma sannolikheten tänkande. Ramverket validerades genom data erhållna från årskurs åtta där tre barn fungerade som fallstudier. Dessa barns tänkande utvärderades vid tre tillfällen under ett läsår och analyserades med hjälp av problemuppgifterna i intervjumiljöer. Resultaten tydde på att även om ramverket gav en sammanhängande bild av barns tänkande i sannolikhet, fanns det statik i systemet som genererade inkonsekvenser inom tänkandets nivåer (Jones m.fl., 1997).

Isoda & Katagiri (2012) genomförde en studie där analyserade de elevers matematiska idéer genom ett lektionsflöde. Lektionsflödet ansågs vara ett verktyg för att få tillgång till elevernas idéer när de är delaktiga i problemlösning. Isoda & Katagiri (2012) använde en forskningsdesign för att bilda ett lektionsstudieteam vägledd av de thailändska versionerna av japanska matteläroböcker. Deras forskningsresultat visade att elevers matematiska idéer uppstod genom lektionsflödet när elevernas idéer om en problemlösning matematiserades. Matematiserings processerna uppnåddes också när elevers matematiska idéer blir ett verktyg för lärande inför nästa lektion (Isoda & Katagiri, 2012).

Dessutom förklarar relaterad forskning att fokusering på elevers tänkande ger en möjlighet för lärares lärande att vara generativ. Vilket innebär att om lärare kan lära sig att prata med sina elever om deras tänkande, pussla om vad svaren säger dem om elevernas förståelse, bestämma hur de ska använda denna kunskap i att planera undervisningen och interagera med eleverna samt ta reda på hur man lär sig mer om elevernas tänkande, då kan lärarnas eget lärande vara generativt (Franke m.fl., 2001).

Franke m.fl. (2001) visade i sin studie hur lärare som deltog i ett professionellt utvecklingsprogram för att förstå utvecklingen av elevers matematiska tänkande fortsatte att implementera programmets principer fyra år efter att det avslutades. Tjugotvå lärare deltog i studien i uppföljande intervjuer och klassrumsobservationer. Alla tjugotvå lärare upprätthöll en viss användning av barns tänkande och tio lärare fortsatte att lära sig på märkbara sätt. Studien avslöjade att de lärare som engagerade sig i generativ tillväxt såg barns tänkande som centralt, hade fördjupade kunskaper om barns tänkande, diskuterade ramar för att karakterisera utvecklingen av barns matematiska tänkande, upplevde sig själva skapa och utveckla sin egen kunskap om barns tänkande och sökte kollegor som också hade kunskap om barns tänkande till stöd. Uppföljningen avslöjade insikter om generativ tillväxt, hållbarhet och förändrad praxis och professionell utveckling (Franke m.fl., 2001). Enligt Franke m.fl. (2001) Kunskapen och analysen av barns tänkande ger en immanent struktur som kan fungera som en ram för att organisera lärares förståelse. Franke m.fl., (2001) menar att när lärare pratar med elever i sina egna klassrum kan lärarna märka hur analyserna av barns tänkande, direkt kan relateras till hur elever i deras klassrum tänker och lär. Helst ger detta en grund för lärare att inse att de själva kan skapa kunskap om barns tänkande när de interagerar med sina egna elever (Franke m.fl., 2001).

Matematiskt tänkande avser matematiska idéer och förståelse (van Es & Sherin, 2008). van Es & Sherin (2008) undersökte förändringar i lärares tänkande när de deltog i en videoklubb utformades för att hjälpa dem att lära sig att observera och tolka elevernas matematiska tänkande. Även om deras data avslöjade att lärarna gjorde viktiga förändringar i deras uppmärksamhet, avslöjade de inte arten av deras utveckling över tid. Vidare menar van Es & Sherin (2008) att lärare behöver observera och undersöka elevernas idéer om matematik, för att sedan kan de använda dessa idéer som ett bevis för påståenden de har gjort om elevernas tänkande för att tolka elevernas förståelse av matematik. Enligt van Es & Sherin (2008) är en av dimensionerna av att lägga märke till att lärare använder kunskap om sitt sammanhang för att resonera kring händelser som de analyserar. En annan dimension är att lägga märke till att läraren identifierar viktiga händelser i en undervisningssituation för att förstå vad som händer, till exempel för att fundera över vad eleverna förstår om ämnet eller hur en undervisningsstrategi har påverkat elevernas tänkande, till skillnad från att undersöka en situation av kritik eller att agera (van Es & Sherin, 2008). För lärare innebär det att man behöver använda kunskap om ämnet, kunskap om hur elever tänker om ämnet för att tolka elevernas förståelse för matematik, vilket gör till exempel att algebralärare bättre kan tolka sina egna elevers förståelse av algebra än tänkandet hos en grupp elever från en annan lärares algebraklass (van Es & Sherin, 2008).

Efter en granskning av litteraturen visade Li & Schoenfeld (2019) att matematikens natur kan förstås som att den har olika ansikten, snarare än att den styrs av en enskild tankeskola. Li & Shoenfeld (2019) problematiserade de traditionella metoderna för undervisning och lärande i matematik. Vidare betonade Li & Schoenfeld (2019) vikten av att ta matematik som en mänsklig aktivitet, se till att den är meningsfull för eleverna och att utveckla elevernas matematiska tänkande om idéer, snarare än att bara absorbera en uppsättning statiska och frånkopplade kunskaper och färdigheter. Om eleverna får rätt erfarenheter kan den formella matematiken tjäna till att organisera och systematisera dessa erfarenheter (Li & Schoenfeld, 2019).

Syfte och forskningsfrågor

Syftet med denna studie är att identifiera och analysera elevernas matematiska tankeprocesser specifikt på specialisering, generalisering, gissning och övertygande, som de uppvisar i sina samtal. Detta illustrerar med exempel från undervisning inom olika ämnesområden. Till exempel geometri, mönster och talföljd samt algebra. Mitt fokus var att avgöra om man kunde identifiera matematiskt tänkande på ett systematiskt sätt. Jag ville se i vilken sammanhang använder eleverna de betonade tankeprocesser och vad som skulle hända när eleverna använder dessa processer i sitt matematiskt tänkande på ett strukturerat sätt.

Denna studie undersöker användningen av tankeprocesser för att identifiera egenskaperna hos elevers matematiskt tänkande och om effektiv användning av dessa processer skulle påverka kvaliteten på elevernas resonemang och engagemang i problemlösningssituationer. Jag försökte besvara följande forskningsfrågor:

1. Vilka olika matematiska tankeprocesser (specialisera, generalisera, gissa och övertyga) använder eleverna på högstadiet i sina problemlösningssamtal och interaktion i ett socialt sammanhang?
2. På vilka sätt är tankeprocesserna kopplat till typen av aktivitet?

Metod

Något övergripande om metoden

Denna studie placerades i en aktionsforskningsmodell och genomfördes med en grundläggande, kvalitativ forskningsansats, där handlar forskning om de tankeprocesser elever använder när de hanterar information i problemlösningssituationer. Denna forskningsmetod syftade till att följa en kvalitativ process för att avslöja sökandet efter att upptäcka, förstå och tolka individers perspektiv, inlärningsprocesser och tankestrategier utifrån Mason m.fl. (2010), Schoenfeld (1992) och Staceys (2006) teoretiska ramverk.

Utformade aktiviteter illustrerar de specifika områden som ansågs lämpliga för att undersöka tankeprocesser hos en grupp av elever på högstadiet, främst i aritmetisk talföljd, geometri och algebra. Aktiviteterna utformades enligt de respektive kategorier för matematiskt tänkande och innehöll ett antal deluppgifter tänkta att kunna undersöka elevernas matematiska tankeprocesser. Den första aktiviteten var relaterades till specialisering och gissningar, medan de andra aktiviteter relaterades till alla fyra processer, dvs. specialisering, gissning, generalisering och övertygande.

Aktiviteter

Aktivitet 1

Siffrorna 2, 3, 4 och 5 kan till exempel kombineras i ett uttryck så här:

$2^3 + 4 * 5$ Uttrycket är lika med 28.

Använda samma siffror och skriv ett uttryck som har värdet 20. Varje siffra ska används en gång och du får använda dig av de fyra räknesätten, potenser och parenteser.

Aktivitet 2

Ett antal personer träffas och hälsar på varandra. Alla hälsningar är mellan två personer i taget.

a) Hur många hälsningar blir det om det är 4 personer?

b) Hur många hälsningar blir det om det är 5 personer?

c) Hur många hälsningar blir det om det är 10 personer?

d) Hur många hälsningar om det är n personer? Hur många hälsningar blir det totalt?

Aktivitet 3

Här ser du de tre första figurerna i ett mönster. Varje ruta har sidan 1 cm. Undersöka förändringar i omkrets och area för varje ny figur.

a) Hur stor omkrets för figur nummer 10?

b) Hur stor area för figur nummer 20?

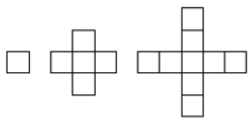


Fig.1 Fig.2 Fig. 3

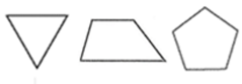
Aktivitet 4

Hur stor är vinkelsumman i en

a) tre-hörning b) fyr-hörning c) fem-hörning d) tio-hörning

e) Bestäm vinkelsumman i tjugosju- hörning

f) Hur stor är vinkelsumman i n-hörning?



Figur 1

Eleverna blandades i heterogena grupper, baserad på blandning av elever med genomsnittliga och höga framgångar. Tanken var att samla in rika data från elever med olika framgångsnivåer eftersom matematiskt tänkande inkluderar egenskaperna att erhålla ny kunskap med hänsyn till användning av strategierna: Specialisering, generalisering, gissningar och övertygande.

Elevernas samtal och deras lösningsförslag analyserade i relationen till de fyra tankeprocesserna (se tabell 1). Tid ägnades åt att analysera olika lösningsförslag, hur problemlösningsprocessen såg ut och vad som är relevant till de fyra tankeprocesser.

Eleverna fick tid att reflektera individuellt över sitt förslag till lösning några dagar efter genomförande av två aktiviteter.

Aktiviteter, i vilket matematiskt innehåll de behandlades och de förväntade processerna som undersökts följer enligt tabell 1.

Aktiviteter	Matematisk innehöll	Förväntade tankeprocesser
Aktivitet 1	Prioriteringsregler och olika matematiska operationer	Gissa, specialisera
Aktivitet 2	De fyra räknesätten och variabel begreppet (algebra)	Gissa, specialisera, generalisera och övertyga
Aktivitet 3	Geometri och talföljder	Specialisera, gissa, generalisera och övertyga
Aktivitet 4	Geometri och algebraiska symboler	Specialisera, gissa, generalisera och övertyga
Se figur 1 för de fyra aktiviteter		

Tabell 1 – Aktiviteter, ämnen och förväntade tankeprocesser.

Data som erhölls var observationer från elevernas samtal, lösningsförslag de presenterade för varandra, granskning av inspelningen från de muntliga elevernas diskussioner samt individuella elevs svar från enkätundersökning.

Problemlösnings faser

Dessa aktiviteter med problemlösning är orienterade med en förenklad koppling till Mason m.fl. (2010), Stacey (2006), Schoenfeld (1992) och Polya`s modellen (1973) problemlösningsfaser. Jag använde Pólyas fyra faser för att referera till de välkända faserna av problemlösning i matematikundervisningen. (se tabell 2)

Tankeprocesser med koppling till problemlösning faser	Mason m.fl. (2010)	Stacey (2006)	Shoenfeld (1992)	Polya (1973)
Specialisering	Inträde	Pröva specialfall	Söka lösningar	Att förstå problemet
Gissning		Förutsäga samband och resultat		Utarbeta en plan
Generalisering	Attack	Leta efter mönster och relationer	Utforska mönster	Att genomföra planen
Övertygande	Granskning	Hitta och kommunicera skäl till att något är sant.	Formulera gissningar	Att se tillbaka

Tabell 2-Förväntade tankeprocesser med koppling till problemlösnings faser från olika forskare.

Tankeprocesserna kan kopplas till problemlösningsfaserna. Enligt Mason m.fl. (2010), Stacy (2006), Schoenfeld (1992) och Polya (1973) problemlösning kan utföras genom flera faser. De två första faserna av Stacy (2006) och Polya (1973) beskrivnings modell utgör den första fasen av Mason m.fl. (2010) och Schoenfelds (1992) beskrivning. Även om matematiskt tänkande ofta framskrider genom att växla mellan dessa faser (Stacy, 2006).

Deltagare

Försöksgrupper som deltog i denna studie var ett antal elever som gick på högstadiet i en grundskola.

Datainsamlingsverktyg

Data i studien samlades in i relation till de fyra aktiviteter jag förberett, genom inspelning av elevers samtal, ett frågeformulär som hölls efter genomförandet av 2 aktiviteter, och genom strukturerade observationer som inkluderar ett observationsprotokoll i form av en checklista (sekvenstabell).

Ett antal elever deltog i studien om matematiskt tänkande, elevers tänkande analyserades med hjälp av verktyget som presenterades i denna studie. Data som användes för att analysera elevernas matematiska tänkande samlades in från elevers samtal och interaktioner i små grupper samt från elevs individuella svar på frågeformulär som erhöll efter två aktiviteter. Både egenskaper och tillståndsdata samlades in från lektionerna. Egenskaperna handlade om elevens matematiska tänkande och dessa förmågor att lösa matematiska problem.

Dataegenskaper från enkätundersökning

Data samlades in genom en enkätundersökning. Frågorna handlade om elevernas syn på matematiskt tänkande och problemlösningsstrategier i relation till aspekterna av tankeprocesser och följde två aktiviteter (aktivitet 3 och 4). Frågeformulären var semistrukturerade och fokuserade på aktivitetsämnen som inkluderade både öppna och slutna frågor.

Tema	**Exempelfrågor**
Problem	○ Vilken strategi använde du?
Matematiskt tänkande	○ Hur började du tänka? Organiserade din information? Ditt tänkande? ○ Vad betyder matematiskt tänkande? Hur känner du igen det?
Tankeprocesser	○ Har du testat att gissa?
	○ Vad var din uppskattning eller förutsägelse?
	○ Hur kunde bevisa det? Förklara det? ○ Finns det en verklig situation där detta kan användas?
	○ Hur skulle din metod fungera med andra problem? ○ Finns det en allmän regel?

Tabell 3-Enkätundersöknings teman och exempelfrågor.

Dataegenskaper från inspelningen av elevernas samtal

Det matematiska tankeprocesserna illustrerades och undersöktes i relation till beskrivningen av problemlösningsstrategier utifrån Mason m.fl. (2010), Schoenfeld (1992) och Stacey (2006). Sedan analyserades också slutförandet av indikatorer enligt tabell 4.

De inspelade samtalen analyserades med tillhörande ljudfil för att få mer nyans i problemlösnings diskussionerna. Indikationer som visade spår av tankeprocesserna i varje aktivitet fördes in i en frekvenstabell (se frekvenstabeller 1–4).

Matematiska tänkande processer	**Kännetecken för en matematisk tankeprocess**
Specialisering	**Exemplifierande: Pröva specialfall, titta på exempel** o Pröva med några specifika fall o Testa specifika numeriska exempel o Utveckla och prova olika möjliga strategier o Skriva ner beräkningar och insikter
Gissning	**Antagande: Förutsäga relationer och resultat** o Undersöka några specifika fall o Uttrycka och underbygga en känsla av alla underliggande mönster o Forma matematiska frågor eller idéer
Generalisering	**Erkännande: leta efter mönster och relationer** o Erkännandet av mönster o Reflektera över de idéer som gjorts o Utvidga omfattningen av de erhållna resultaten o Skapa ordning och mening ur en överväldigande mängd sinnesdata
Övertygande	**Argumenterande: Länka tillbaka till strukturen för originaldata** o Hitta och kommunicera orsaker till att något är sant o Undersöka nätet av gissningar och testa dem mot specialiseringar o Forma ett mönster av de erhållna resultaten

Tabell 4-Indikatorer för tankeprocesserna i det matematiskt tänkande (Mason m.fl.,2010; Schoenfeld, 1992; Stacey, 2006)

Dataanalys

Dataanalysteknik utfördes genom analys av varje matematisk tankeprocess baserat på teorin från Mason m.fl. (2010). Kvalitativa analyser användes för insamlade data från både observationer och individuellt elevs svar. Enkätsvaren följdes efter två aktiviteter.

Därefter granskades inspelade samtalen och de svar som eleverna gav på varje fråga i detalj. Elevernas svar analyserade individuellt och gruppvis för alla frågorna i samtliga aktiviteter med hänsyn till den hypotetiska ramen.

Tankeprocesserna studerades genom några aktiviteter med problemlösningsprocess, och endast utvalda delar av matematiken. Data och egenskapsresultat presenterades först separat och sammanfattades sedan i sammanfattning av resultaten och i diskussionen.

Resultaten stöds av utdrag ur lösningsförslag och elevernas svar på enkätfrågor. I dessa utdrag svarade eleverna olika på olika frågor. Tolkning av resultaten gjordes med hjälp av analysmetoden och enligt den teoretiska ramverken. Där elevers samtal, lösningsförslag och enkätsvar kodades enligt de fyra tankeprocesserna. Dessa är specialisering, generalisering, gissning och övertygande i elevernas matematiskt tänkande.

Indikatorn för matematiskt tänkande kan ordnas i lämplig ordning och enligt de beskrivna egenskaperna (se tabell 4). Egenskaperna baserade på Burton (1984), Mason m.fl. (2010). och Stacy (2006) teorin.

Operationalisering

Operationaliserings fasen fungerar i huvudsak som en explicit koppling mellan konceptualiserings fasen och praktiken (Lynham, 2002). Lynham menar att operationaliseringen av en teori måste bekräftas och eller testas i dess verkliga sammanhang. För att det teoretiska ramverket ska framkalla tillit och förtroende måste den initiala förklaringen av fenomenet, problemet eller frågan som är inbäddad i ramverket tillämpas på och empiriskt (Lynham, 2002)

Enligt Lynham (2002) innebär det ett informerat teoretiskt ramverk som har omvandlats till komponenter eller element som kan undersökas ytterligare och bekräftas genom rigorös forskning och relevant tillämpning. Det handlar om att definiera hur ett koncept kan mätas, observeras eller manipuleras. I det här fallet handlar det om tankeprocessen specialisering, generalisering, gissning och övertygande som undersöktes i elevernas matematiskt tänkande. Här följer en operationell beskrivning för de fyra tankeprocesserna:

Specialisering innebär att man vänder sig till exempel för att lära sig mer om frågan (Mason m.fl., 2010). Om eleverna inte förstår vad en fråge handlar om, eller inte kan svara på den övergripande fråge, kan de bestämma sig att prova ett exempel (specialisera) för att se vad som händer, och om de är inriktade på att konstruera övertygande argument, kan de lära av skäl snarare än regler (Stacey, 2006). De specifika fallen kan hjälpa eleverna att få en uppfattning om vad frågan egentligen handlar om, så att de kan göra en välgrundad gissning. Ytterligare noggrann specialisering med ett öga på "varför" snarare än "vad" kan leda till insikt om vad som verkligen händer (Mason m.fl., 2010). Specialisering kan kännas igen på att eleverna söker efter eller formulerar exempel som har mindre variabilitet i minst en dimension jämfört med den fråge (uppgift) de börjar ifrån.

Generalisering börjar när eleverna känner ett underliggande mönster, även om de inte kan formulera det. Det innebär att de upptäcker ett mönster som leder till att eleverna försöker formulera vad verkar vara sant (en gissning), varför det sannolikt är sant (en motivering), när det sannolikt är sant (en motivering) (Mason m.fl., 2010). En generalisering kan kännas igen på att eleverna beskriver variation inom minst en dimension och försöker formulera denna i ord, bild eller symboler.

Gissning är ett påstående som verkar rimligt, men vars sanning inte har fastställts, det som ofta refereras till som en hypotes. Med andra ord, det har inte blivit övertygande motiverat och ändå är det ovisst om det kommer att motsättas av några exempel, och det är inte heller känt om det har några konsekvenser som är falska (Mason m.fl., 2010).

Övertygande är ett argument som står emot granskning och är den sista processen. Det som behövs är inte bara exempel, utan någon anledning, något bakomliggande mönster eller en struktur för att argumentera (Mason m.fl., 2010)

Resultat

Detta kapitel har delats in i fyra delar. Den första innefattar frekvenstabeller och stapeldiagram. Frekvenstabellen presenterar hur många matematiska tankeprocesser identifierades i varje grupp, medan stapeldiagrammen visar datafrekvenser från olika grupper och kategorier för varje aktivitet. Sedan följer den andra delen som innehåller en presentation av analysen exemplifierat av ett par exempel i detalj. Den tredje delen innehåller en presentation av elevsvar från enkätundersökning och slutligen kommenterar jag på hur de fyra tankesätt ser ut till att verka ihop och vilken roll har elevernas interaktion spelar för processen.

Resultaten av indikatorer inom matematiskt tänkande processdata som förväntas i det skede av att förstå och lösa problemet erhölls baserat på granskning för inspelade diskussioner mellan eleverna. Följande tabeller visar resultaten av den matematiska tankeprocess som erhållits vid problemlösning från varje aktivitet. Aktiviteterna är av den typ som kan provocera fram både matematiskt tänkande och matematik. Resultatet från varje aktivitet sammanställt i en frekvenstabell, där är x är ett svar som indikerar användningen av respektive process. I kolumnen för varje process visas hur många gånger varje svar förkommit i undersökningen. Antal rader för x i respektive kolumn relaterade till deluppgifterna (se frekvenstabeller 2 - 4) eller aspektstyp (se frekvenstabell 1) som eleverna visade i sina samtal. Data för deluppgifterna erhölls genom de strukturerade observationerna och granskning av den inspelade elevers samtal. Varje frekvenstabell innehåller data från två grupper. Elevgrupper kallas för grupp 1 och grupp 2 där varje grupp består av ett mindre antal elever. Av etiska skäl anges inte antalet deltagare i varje grupp.

Frekvensen av de matematiska tankeprocesserna

Resultatet av den matematiska tankeprocess som observerades vid problemlösnings samtal.

Totala processer identifierad					
Aktivitet 1		Specialisering	Gissning	Generalisering	Övertygande
Skriva ett uttryck	**Grupp 1**	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxx		
	Grupp 2	xxxxxxxxxxx	xxxxx		

Frekvenstabell 1

Totala processer identifierad					
Aktivitet 2		Specialisering	Gissning	Generalisering	Övertygande
Hälsningar	**Grupp 1** (a-b) (c-d)	xxx xxxxx	xx xx	 xx	 x

	Grupp 2 (a-b) (c-d)	 xxx xx	 xx x		

Frekvenstabell 2

Totala processer identifierad					
Aktivitet 3		Specialisering	Gissning	Generalisering	Övertygande
Hitta mönster **(omkrets och area)**	**Grupp 1** a) omkrets b) area	 xxxxxxx xxxxx	 xxxx xxx	 xx xx	 xx xx
	Grupp 2 a) omkrets b) area	 xxxxxx xxxxxxx	 xxxx xxxxx	 x x	

Frekvenstabell 3

Totala processer identifierad					
Aktivitet 4		Specialisering	Gissning	Generalisering	Övertygande
Vinkelsumman i månghörningar	**Grupp 1** (a-d) (e-f)	 xxxxxx xxxxxxxxx	 xxxx xxxxxxx	 xxxx xxxxxx	 xxx xxxxx
	Grupp 2 (a-d) (e-f)	 xxxxx xxxxxx	 xxxx xxxxx	 xxx xxxx	 xxx xxxx

Frekvenstabell 4

Dessa (x) rader motsvarar diagrammets y-axel. Gruppindelningen (kolumnerna) motsvarar staplarna på x-axeln.

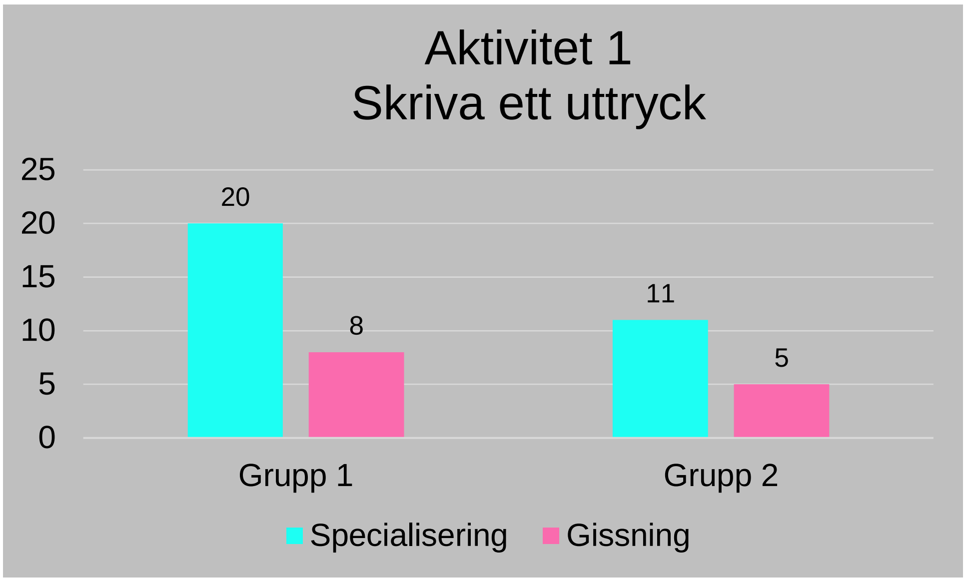


Diagram 1

Diagram 1 visar resultatfördelningen i tankeprocesserna när eleverna arbetade i grupper för att lösa problemet i aktivitet 1. Resultatet visar att alla specialiseringar och gissningar gjordes i både grupperna ledde inte till någon generalisering. Staplarna i diagram 1 visar att båda grupperna oscillera mellan faserna ”att pröva specifika fall” och ” att förutsäga samband och resultat” (se tabell 2). Det framgår också att det finns en skillnad inom aspekterna av de matematiska tankeprocesserna att specialisera och gissa. Resultaten visar också att både grupperna i fasen " att pröva specifika fall" kunde specialisera bra, genom att söka lösningar baserade på informationen i aktiviteten (se figur 1).

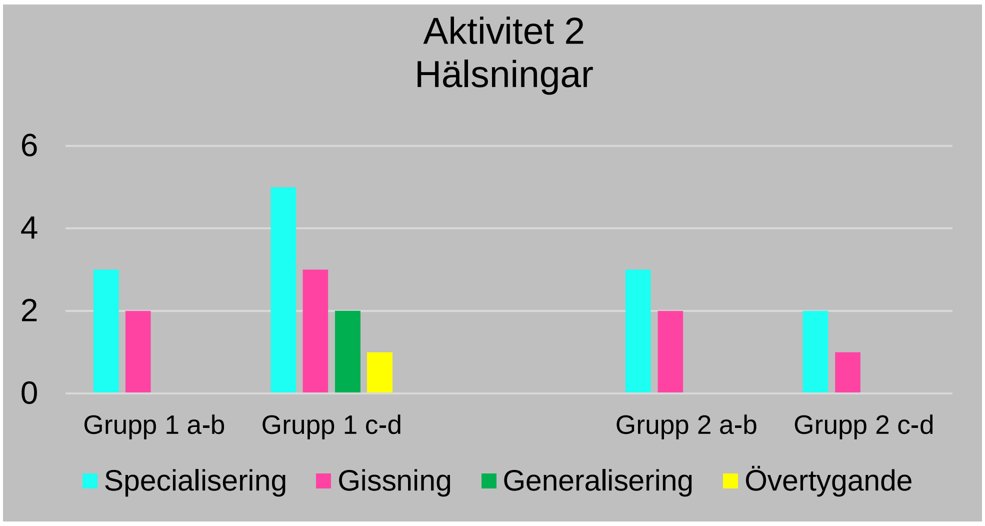


Diagram 2

Diagram 2 visar resultaten från aktivitet 2. Från dessa data visas slutförandet av indikatorerna för tankeprocesser i gruppkategorier, där analyserade data visar att det finns en skillnad i användningen av tankeprocesser mellan de två grupperna. De förväntade processerna i båda grupperna hade signifikanta skillnader i de matematiska tankeprocesserna att specialisera, gissa, generalisera och övertyga. Resultatet visar också att både grupperna i faserna av att "förutsäga samband och resultat " och ”leta efter mönster och relationer” (se tabell 2) kunde specialisera och gissa bra, genom att söka och undersöka olika möjliga lösningar baserade på informationen i aktiviteten (se figur 1).

Däremot hade grupp 2 ingen generalisering eller övertygande när det gäller delfrågor (c-d).

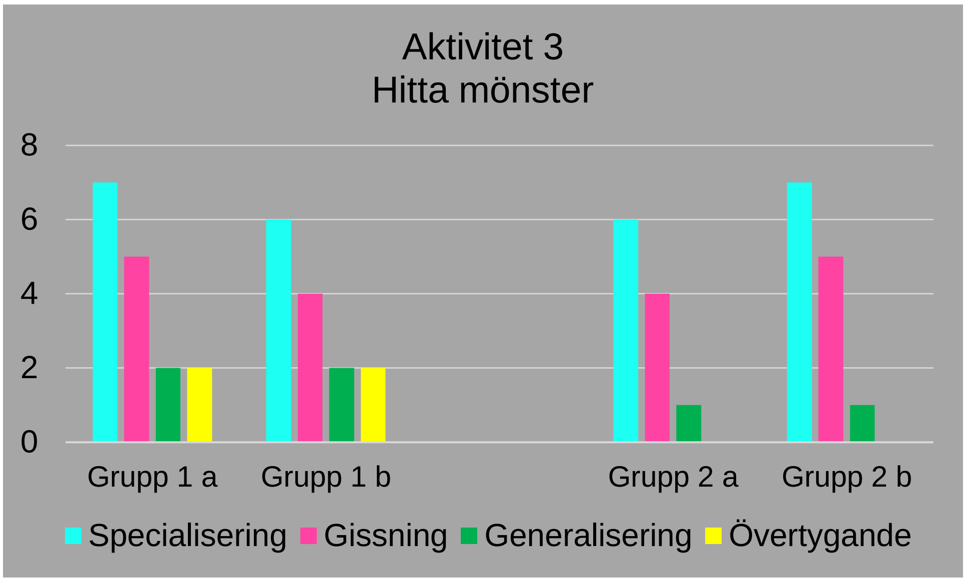


Diagram3

Resultatet från aktivitet 3 kan sammanfattas på diagram 3. Som det framgår av diagrammet tycks det finns betydande skillnader mellan grupperna i tankeprocesserna att generalisera och övertyga för att lösa problemet. Resultaten visar också att både grupperna i faserna av att ”Pröva specifika fall”, ” förutsäga samband och resultat” kunde specialisera och gissa bra i genomsnitt, baserade på informationen i aktiviteten (se figur 1) för att hitta rätt strategi. Grupp 1 kunde göra mer generalisering när det gäller fasen ” leta efter mönster och relationer”, där de kunde välja en beskrivning för att göra en lämplig illustration utifrån informationen och syftet med aktiviteten. På samma sätt gjorde grupp 2 en förutsägelse, men de kunde inte formulera de korrekta gissningarna eller kommunicera orsaken genom illustrationen de valde. Själva urvalet av illustrationer baserades på ämnesperspektiv genom deras erfarenheter.

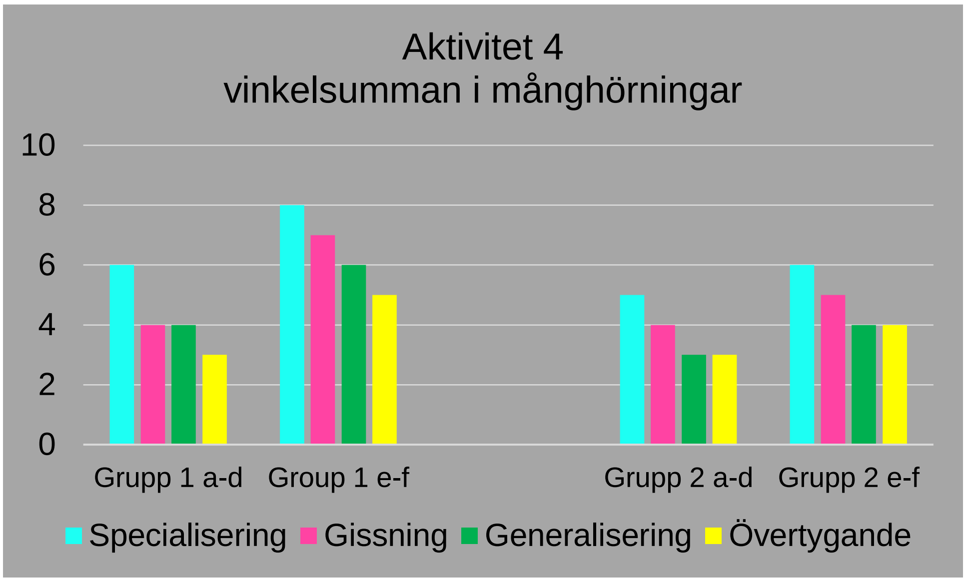


Diagram 4

Diagram 4 visar att skillnader inte är så stora mellan den matematiska tankeprocessen att specialisera, generalisera, gissa och övertyga i faserna för att ”pröva specifika fall” ”undersöka specifika fall”, ”utvidga omfattningen av de resultaten som erhålls” och ”kommunicera skäl till att något är sant”. Både grupperna i faserna ”att Pröva specialfall” och ”förutsäga samband och resultat” kunde de specialisera och gissa bra. Även i faserna ” leta efter mönster och relationer” och ” hitta och kommunicera skäl till att något är sant” (se tabell 2) de kunde motivera de idéer de gjorde och bilda ett mönster av de erhållna resultaten (se tabell 4).

Analysen exemplifierat

Aktivitet 1-Exempel från elevers samtal kring problemlösningsförslag		
Tankeprocesser	**Specialisera →** **← Gissa→**	**← Generalisera→** **← Övertyga**
Grupp 1 ,	Vi testar så att vi kan bestämma vilka räknesätten vi kan använda! $5*4 + 3^2 = 29$ Använd division! $4/2 + 5*3 = 17$ Vi testar med miniräknare utan potenser $2 * 3 + 4 + 5 = 15$ Kan vi använde oss av exemplet i uppgiften som en mall? Om vi multiplicera två av termerna! $5*3 + 4 + 2 = 21$, det är ganska nära! Testa med potens! Testa med subtraktion och multiplikation! $(3–2) * 4 * 5 = 20$ Det stämmer!	
Grupp 2	Vi måste testa med en låg siffra upphöjt med ett annat för låg siffra! $3^2 + 5 + 4 = 18$ Använd multiplikation och addition! $5*3 + 4 + 2 = 21$ det är ganska nära! Jag tror att jag har hittat ett sätt: $(3–2) * 4 * 5 = 20$ Men vi har inte använts potenser! Jag tror att vi har räknat rätt! men det känns att det borde finnas ett annat sätt.	

Aktivitet 2-Exempel från elevers samtal kring problemlösningsförslag		
Tankeprocesser	**Specialisera →** **← Gissa→**	**← Generalisera→** **← Övertyga**
Grupp 1	Vi tänker om det är 4 personer blir antal hälsningar: $3 + 2 + 1 = 6$ Det blir en mindre i själva entalet (personer), eftersom om vi är fyra personer så hälsar jag inte på mig själv, utan jag hälsar på tre personer. Vi gör på samma sätt om det är 10 personer: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$	Men det är ganska svårt att skriva alla de här siffrorna! För att göra det enkel tester vi en formel: $n (n -1) /2$ Vi tester för 10 personer: $10* (10 – 1) / 2 = 10 * 9 / 2 = 45$ Vi har en annan formel som fungerar på samma sätt! $n (n + 1) /2$ Om vi testar med mindre tal till exempel 9 $9 * (9 + 1) / 2 = 9 * 10/ 2 = 45$

Grupp 2	Vi tänker om person 1 hälsar på person 2, 3 och 4, så person 2 ska inte hälsa på person 1, eftersom de redan har hälsat på varandra, så det blir minskning med en på antal personer Det blir samma metod för 10 personer 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 vi börjar med att göra en tabell som kan hjälpa oss att hitta ett samband mellan antal personer och antal hälsningar.	

Aktivitet 3-Exempel från elevers samtal kring problemlösningsförslag		
Tankeprocesser	**Specialisera → ← Gissa→**	**← Generalisera→ ← Övertyga**
Grupp 1	Med varje ny ruta ökar antal sidor med 3. Omkrets för figur 1 är 4, för figur 2 är 12. Arean ökar med 4 rutor för varje ny figur. Vi kan räkna arean för figur 3: 25 - 16 = 9 cm^2	Omkrets ökar med 8 cm i varje ny figur. Detta betyder att det går att räkna omkrets för 10:e figur. 4 + (10 - 1) * 8 = 76 cm, (4 + (N-1) * 8) Arean ökar med 4 cm^2 för varje ny figur. Den 20:e figuren area blir då: (1 + 19 * 4) = 77 cm^2 (1+ (N-1) *4)
Grupp 2	Omkrets för figur 1 är 4, för figur 2 är 12. Till exempel area för figur 3 beräknas: 25 - 16 = 9 cm^2	Omkrets för 10:e figur beräknas: 8 *10 + 4 = 84 cm Som generellt gäller följande formel: (8 * x + 4) Den 20:e figuren area blir: 20 * 4 +1 = 81 cm^2 Generellt gäller följande formel: (x * 4 + 1)

Aktivitet 4-Exempel från elevers samtal kring problemlösningsförslag		
Tankeprocesser	**Specialisera → ← Gissa→**	**← Generalisera→ ← Övertyga**
Grupp 1	Vinkelsumman alltid i en triangel blir 180 gradar. Och i en fyrhörning skulle jag säga är 360 gradar, man kan se det som att det är två trianglar. Varje hörn som läggs till kan man se det som att en ny triangel bildas. Vilket betyder 180 + 180 = 360^0	För en 27-hörning eller de större figurerna, kan vi tänka på samma sätt? 27 – 3 = 24 tror jag! Då kan man ta bort det som man har från början, eftersom vi utgår ju från att det var tre hörn. Vinkelsumman = (n - 3) * 180 + 180 (n är antal hörn i en månghörning) Vi tester det med till exempel 4 hörning?

Grupp 2	Det vi vet att vinkelsumman i en tre-hörning (triangel) är 180 grader. För det fyrhörning är det bara dela upp fyrhörning i två tringlar. För en tio-hörning! Kanske 180 *8 =1440 grader	Nu ska vi bestämma vinkelsumma i en 27-hörning eller de större figurerna: $180 * (27–2) = 4500^0$ Är detta är rimligt? Ja det är det eftersom det är ganska många hörningar. Vi tester med en femhörning. $180* (5–2) = 540^0$ grader Generellt gäller följande formel: $180 * (n – 2)$

Elevsvar från enkätundersökning

Elevers individuella svar och data samlades in från enkätundersökning som utfördes efter genomförande av två aktiviteter, dessa är aktivitet 3 och 4. Enkätfrågorna baserat på aktiviteternas innehåll. Elevernas svar analyserades och kodades enligt de fyra tankeprocesserna i det matematiskt tänkande. Följande är exempel på elevsvar avser teman i tabell 3.

Exempel frågor	Exempel på elevsvar	Tankeprocesser
Hur började du tänka? Organiserade din information? Ditt tänkande?	**Aktivitet 3** *Jag började med att se hur mycket omkretsen ökade per figur för att där igenom hitta ett samband*	Specialisering
	Aktivitet 4 *Jag tänkte på det vi har lärt oss om vinkelsumma. till exempel att en triangel har vinkelsumman 180^0 samt en fyrhörning har vinkelsumman $180^0 * 2 = 360^0$*	Specialisering
Vad betyder matematiskt tänkande? Hur känner du igen det?	***Aktivitet 3*** *Matematiskt tänkande betyder att tänka på ett matematiskt sätt. Alltså att lösa olika problem med matematiska metoder. Jag känner igen det, eftersom det är det man gör när man ska lösa olika problem i matteboken eller muntligt*	Specialisering
	Aktivitet 4 *Jag tänker att matematiskt tänkande är när man tänker med siffror och andra matematiska tecken som till exempel π*	Specialisering
Vilken strategi använde du?	***Aktivitet 3*** *Vi använde oss av att räkna hur många rutor figurerna hade med hjälp av rutnätet*	Specialisering
	Aktivitet 4 *Jag tänkte först ut vinkelsumman individuellt för att sedan hitta ett mönster mellan antal hörn och vinkelsumma.*	Specialisering Gissning

Har du testat att gissa?	***Aktivitet 3*** *Ja, jag testade. Först med en gissning för att se om mitt svar skulle vara någorlunda nära gissningar*	Gissning Specialisering
	Aktivitet 4 *Inte riktigt, vi försökte räkna ut det direkt*	Specialisering
Vad var din uppskattning eller förutsägelse?	***Aktivitet 3*** *Jag hade ingen uppskattning, jag började räkna direkt*	Specialisering
	Aktivitet 4 *Att 180 gånger ökningen av antalet hörn från figur 1 alltså N-3 eftersom den första figuren hade 3 hörn. Sedan adderar man 180 eftersom den första figuren hade 180 som vinkelsumman och den alltid behövs adderas till ökningen*	Specialisering Gissning
Hur säker var du på ditt svar?	***Aktivitet 3*** *Jag var säker då hade jag kommit fram till en formel samt testade den*	Generalisering Övertygande
	Aktivitet 4 *Jag kände mig säker då jag hade testat detta på flera olika månghörningar och det hade stämt.*	Specialisering Generalisering Övertygande
Hur kunde bevisa det? Förklara det?	***Aktivitet 3*** *Jag kan bevisa mitt svar genom att först se om det låter rimligt och sedan kontroll räkna och se om jag får samma svar om jag använder samma metod på en annan figur*	Specialisering Generalisering Övertygande
	Aktivitet 4 *Genom att testa formeln på de månghörningar som jag sedan kände till vinkelsumman på för att se om formeln stämde. Vilket den gjorde.*	Övertygande
Finns det en verklig situation där detta kan användas?	***Aktivitet 3*** *Exempelvis hur mycket pengar jag får på tre månader om jag får samma lön*	Generalisering Övertygande
	Aktivitet 4 *Kanske om man är matematiker eller byggarbetare, arkitekt*	Specialisering Generalisering
Hur skulle din metod fungera med andra problem?	***Aktivitet 3*** *Jag tror sättet hur vi kom fram till en formel skulle fungera bra med andra problem. Dessutom är det bra att testa sig fram i andra problem.*	Gissning Specialisering Generalisering

	Aktivitet 4 *Metoden skulle fungera väl ifall problemet handlade om figurer som förändras i en jämn oförändrad takt.*	Specialisering Generalisering
Finns det en allmän regel?	***Aktivitet 3*** *Nej, eftersom alla figurer / former inte är lika och ökningen kan vara olika*	Specialisering Gissning
	Aktivitet 4 *Ja, för att räkna ut vinkelsumman för en månghörning kan man använda formeln: 180 * (n – 2)*	Specialisering Generalisering Övertygande

Efter Dataanalys från observation, elevers samtal och enkätundersökning hittades fyra mönster:

För det första, klassrumsobservationen visade att elevers interaktion och samtal i små grupper uppmuntrar eleverna att använda sig av tankeprocesser i sitt matematiska tänkande, vilken påverkade positivt elevernas engagemang att lösa problemen.

För det andra, resultat från analysen, observationer och enkäter visade att alla tankeprocesser inte nödvändigtvis ingår i elevernas resonemang när de arbetar med problemlösning.

För det tredje, resultatet från dataanalys visade att aktivitetens strukturella egenskaper och uppgifternas svårighetsgrad påverkade vilka tankeprocesser eleverna använde.

För det fjärde, dataanalys och observation visade att elevernas användning av det tidigare inlärda kunskaper och deras erfarenheter påverkade i vilken grad eleverna specialiserade sig, gissade, generaliserade och övertygade.

Resultaten från frekvenstabellerna visar att eleverna kunde specialisera sig på alla fyra aktiviteterna. Även om statistiken visade att båda grupperna hade specialiserat sig lika väl var det en märkbar skillnad mellan grupperna och aktiviteterna.

Frågan om på vilka sätt är tankeprocesserna kopplat till typen av aktivitet? Denna fråga besvarades genom att tolka resultaten av elevernas matematiska tänkande som avslöjades när den första forskningsfrågan besvarades. Resultaten visade att elevernas tankeprocesser färdigheter i problemlösning såväl som den naturliga rörelsen mellan tankeprocesserna och dessa strategier kan karakteriseras som nyckeln till deras framgång att lösa matematiska problem.

Samspel

Baserat på dessa data, förklarar jag att det finns en skillnad i värde mellan de fyra tankeprocesskategorierna beroende på typen av aktivitet och problemlösningssvårighet.

Resultatet från observationer, elevers samtal och elevernas lösningsförslag visar alla fyra processerna för matematiskt tänkande och processerna till spiralformade ramverket i enlighet med Burton (1984) teorin. För att specialisera sig manipulerade eleverna siffror som var konkreta för de för att få i gång en känsla och skapa artikulationen av en generalisering.

För att förstå och utveckla elevers matematiska tänkande behöver lärare och forskare ett verktyg som går utöver traditionella prov och bedömningar. Det framgår från resultatet att matematiskt tänkande påverkas av samspelet mellan aspekterna (kunskapsbas, problemlösningsstrategier, övervakning och kontroll, uppfattningar och effekter och praxis) som föreslagit av Schoenfeld (1992) och tankeprocesserna (specialisering, gissning, generalisering och övertygande) som presenterad av Mason m.fl. (2010).

Diskussion

Syftet med denna del är att diskutera vad som hittats i relation till forskningsfrågorna om elevernas tankeprocesser och den dynamiska processen av problemlösning.

Som framgått ovan har diskussioner, interaktioner tillsammans med erfarenheter och aktivitetsegenskaper en viktig roll i problemlösning. Relationerna mellan problemlösning, tankeprocesser och problemlösningsfaser visar sig vara dynamiska, de påverkar varandra och eleverna rör sig naturligt mellan dessa olika processer.

Observationen och dataanalysen visade att de fyra tankeprocesserna, specialisering, generalisering, gissning och övertygande inte alltid kommer tillsammans i en problemlösningssituation. Beroende på typ av aktivitet använder eleverna ibland två eller tre tankeprocesser. Datasekvensen från de fyra aktiviteterna visade att specialisering och gissning var nödvändiga i elevernas tänkande medan generalisering och övertygande inte kunde upptäckas i alla aktiviteter i både grupperna. Detta resultat skiljer sig från Stacey (2006) som påvisade empiriskt två par processer genom vilket matematiskt tänkande ofta går fram, det är specialisering och generalisering som det ena process-par, medan gissning och övertygande som det andra. Enligt Staceys (2006) om eleverna inte förstår vad en fråge ställer, bör de själva bestämma sig för att prova ett exempel (specialisera sig) för att se vad som händer, och om de är inriktade på att konstruera övertygande argument, då kan de lära sig av skäl snarare än regler (Stacey, 2006).

I den här studien verkade eleverna förflytta sig mellan att specialisera sig och att gissa utan att generalisera och övertyga i vissa situationer. Vilket innebar att eleverna inte alltid kunde se ett tydligt mönster när de arbetade tillsammans, något som styrks av tidigare forskning (Hino, 2015; Sfard & Kieran, 2009). Detta innebär att aspekterna av generalisering och övertygande inte är uppenbara i problemlösningssituationer där elever samtalar och diskuterar problemet genom klassrumsinteraktion. En möjlig tolkning till detta är att eleverna har olika erfarenheter och förmågor när det gäller generaliserings aspekt. Elevernas erfarenheter och den tidigare inlärde matematikkunskapen påverkade deras användning av tankeprocesserna, något som tidigare studier också har visat till exempel (Chinnappan, 1998; Webb m.fl., 2021) att elevernas kunskap i matematik hjälper de att skapa nya kopplingar mellan matematiska idéer och representationer och utöka sina problemlösningsstrategier.

Resultatet antydde att både grupperna i fasen av att förstå problemet kunde specialisera bra, i genomsnitt, genom att göra illustrationer baserade på informationen i problemet för att göra det lättare för dem att hitta rätt strategi. Både grupperna övervägde att pröva specifika fall (specialisera) i alla aktiviteter. Resultatet visade också att gissningar har betydelse för att artikulera och manipulera informationen och siffrorna för att man ska kunna ge sig på problemet, vilket stämmer överens med Burtons (1984) modell i beskrivningen av dynamiken av det matematiska tänkandet.

Dataanalysen, resultaten visade också att aktivitets typ och svårigheten påverkade vilka tankeprocesser eleverna använder i sitt problemlösande samtal. Resultatet indikerade att eleverna var mer engagerade i att generalisera och övertyga sig i den fjärde aktivitet i jämförelse med de andra aktiviteter. Vid observationen och dataanalys av problemlösnings samtal från både grupperna indikerades att alla kategorier för tankeprocesserna inkluderades såsom specialisering, generalisering, gissningar och övertygande i elevernas diskussioner när de samtalade kring olika lösningsförslag för att komma fram till svaret. Detta var förväntats eftersom aktivitets egenskaper och kvaliteten på elevernas geometriska kunskap ledde eleverna genom de tankeprocesser som förklarades av Burton (1984). Således de strukturella egenskaperna hos aktiviteten baserade på geometrikunskaper och elevernas färdigheter kan ha genererat framsteg inom tankenivåerna. Detta ligger i linje med Mason m.fl. (2010) hävdande, när man försöker förklara varför, för att motivera en gissning om vad som är sant, finns det generellt två källor till mönster, den ena är originaldata vilket är vad eleverna vet, medan den andra källan är vad eleverna gissar vilket är vad de vill motivera (Mason m.fl., 2010).

Dataanalysen visade att aktivitetstyp och dess strukturella egenskaper påverkar elevers användning av tankeprocesserna i problemlösningssituation. Detta skiljer sig inte från Mason m.fl. (2010) argument, att fokusera på specifika strategier gör frågan meningsfull att börja se ett underliggande mönster i alla specialfall som kommer att vara ledtråden för att lösa frågan helt.

Observationer och dataanalys visade att effekten av elevernas erfarenheter och interaktion märkbar. Oavsett aktivitets typ, eleverna engagera sig i andras idéer när de samarbetar i små grupper, vilket stämmer överens med Webb m.fl. (2021).

Baserat på exempel på elevers skriftliga kommentarer från enkäter som besvarades individuellt gällande problemlösning, matematiskt tänkande och tankeprocesser, indikerade resultaten av elevernas svar att de var mer benägna att specialisera sig och generalisera än att gissa och övertyga.

Generellt sett indikerades elevs svar från enkätundersökning att eleverna har specialiserat och generaliserat mer än att de använde sig av gissningen och övertygande. Detta resultat skiljer sig till en viss del från observationen och dataanalys av elevers inspelningssamtal. En möjlig tolkning är att vissa elever försökte undvika att nämna att de har använt sig av gissning strategi i de enskilda svaren. De verkade vara medvetna om att gissning inte är riktigt sann. För eleverna betyder generalisering att använda algebra. Då har de redan lärt sig att använda algebra för att skriva ett bevis, men redan innan de har denna färdighet kan de få fram övertygande argument (Stacey, 2006).

Denna studie ramades in av en klassrumsobservation, och placerades i en aktionsforskning. Då forskning avser matematiskt tänkande, innebär det att observationen var en viktig del av studien för att studera och granska elevers tankar och idéer i samband med problemlösningssituationer. Något som tidigare forsknings också har visat (Franke m.fl., 2001; van Es & Sherin, 2008) där lärare kan skapa kunskap om barns tänkande när de interagerar med sina egna elever. I den här studien hade samtalen, klassrumsinteraktion och lärare observation en betydande roll att identifiera viktiga händelser i klassrumssituation för att förstå elevernas matematiskt tänkande och deras förståelse om ämnet i syftet med att kunna agera lämpligt i situationer som kan påverka elevernas tänkande, något som styrks av tidigare forskning (Mata-Pereira & da Ponte, 2017) som visade att lärarens agerande som får eleverna att generalisera och motivera.

I denna studie använde jag en kombination av olika metodiska verktyg, dessa är klassrumsobservation, elevers samtalsinspelning, klassrumsinteraktion, och enkätundersökning. Detta för att göra det möjligt att tolka och analysera den insamlade data utifrån den faktiska situationen, på så sätt kan olika aspekter beaktas. Vilket resulterar en bättre förståelse av elevers matematiska tänkande. Det är mycket svårare att observera tankeprocesser mellan människor som pratar tillsammans, eftersom olika personer signalerar på olika sätt, speciellt om de är osäkra eller osäkra i gruppen (Mason, 2002).

Aktionsforskning var en viktig process i denna systematiska undersökning som syftade till att studera tankeprocesserna för att förbättra matematikundervisning och för att motivera och utveckla elevers lärande. Detta är i linje med Mason (2002) som hävdar att en av de vanligaste observationerna av människor som gör personlig forskning är att de lägger märke till och ifrågasätter mer. Det är mer effektivt att notera faktumet av inre motstånd och att koncentrera sig på att se möjligheter att försöka agera annorlunda (Mason, 2002). Det kan ibland uppstå en plötslig känsla av ökad medvetenhet och möjlighet och om ett nytt alternativ väljs (Mason, 2002).

De metodologiska nackdelarna var att det var tidskrävande, eftersom datainsamling och analysen utfördes med hjälp av olika metodiska verktyg som ska beaktas. Svårigheter att observera tankeprocesserna mellan människor och ställa frågor individuellt i enkäten, svårighet att tolka den sociala interaktionen, eftersom olika situationer upplevs olika vid olika tidpunkter.

Dataanalysen från klassrumsobservation och enkätundersökning visade att atmosfären och interaktioner bidrog till elevernas framgång att prova idéer för att lösa problem. Detta stämmer med Schoenfeld (1992) påstående att skapa en klassrumatmosfär där alla elever känner sig bekväma med att prova idéer. Enligt Schoenfeld (1992) på lektionerna lär sig eleverna att matematiken i vårt nuvarande klassrum är till stor del kulturell och sträcker sig långt bortom räckhåll för de matematiska fakta och procedurer de studerar enligt den explicita läroplanen. I denna studie påverkades elevernas prestationer i alla aktiviteter av klassrumsatomsfären som gjorde det möjligt för eleverna att förklara sina tankar i alla skeden av problemlösning.

Att lägga märke till hur elevernas tänker är både faktiska och möjliga och kräver smidighet i ögonblicket som måste vara både fantasifullt och disciplinerat, då finns det möjlighet att noga följa elevernas tänkande, med hjälp av flera beviskällor, samt att ha i åtanke och överväga alternativa drag och deras tajming. (Sherin m.fl., 2011). Vad som är mycket mer användbart är att uppleva och använda dem själv (Mason, 2002).

I boken "Researching your own practice" skrev Mason (2002):

"*The more you listen to students working together in groups, the more you realise the complexity of 'being taught'. The more you probe children's thinking, the more you realise how sophisticated and powerful children's thinking can be."* (Mason, 2002, s. 27)

Genom observationer och klassrumsinteraktioner fick jag titta närmare på aspekterna som påverkar elevernas kunskapsutveckling. Även om mitt fokus var från början att undersöka det matematiskt tänkande och dessa strategier som eleverna använder i sitt problemlösande samtal, kom jag fram till att framsteg i det matematiska tänkandet kan relateras till specifika typ av interaktioner. Vidare var de specifika interaktioner som inducerade en specifik nivå av användning av de fyra tankeprocesserna relaterade till aktivitetsegenskaper och elevers erfarenheter. Det är också värt att notera att de specifika interaktionerna kom från elever med varierande framgång i matematik, vilket tyder på att de flesta elever faktiskt deltog i att föra processen framåt, och att de förmodligen uppnådde mer tillsammans än de skulle ha lyckats var för sig (Varhol m.fl., 2021).

Genom att studera tankeprocesser och dessa strategier för att tolka elevernas färdighet har jag blivit mer medveten om att eleverna använder tankeprocesser i olika utsträckning utifrån sin process och sin tidigare inlärda kunskapar. Jag har även blivit mer övertygad att elevernas lärande sker på matematiklektionerna på grund av gruppdiskussioner, erfarenhetsutbyte, idéutbyte, klassrumsinteraktion och inlärningsatmosfär. De inblandade grupperna har också blivit bättre på att känna igen mönster och relationer i problemlösningssituation.

Denna studie visade att förståelse av elevers matematiska tänkande framgångsrikt kan avslöja de dynamiska problemlösningsstrategier som eleverna använder. Dessa strategier var en integrerad del av elevernas tankeprocess. Dessutom stödde elevernas syn från den individuella svar på enkätundersökning på matematiskt tänkande resultaten från problemlösnings förslagit från både grupperna.

När eleverna arbetade i små grupper för att diskutera lösningsförslag i fyra olika aktiviteter hade de ingen idé om Burtons (1984) tankeprocesser för matematiskt tänkande. Syftet var att leta efter dessa processer i deras diskussioner när de samtalar kring problemlösning för att komma fram till svaret. Även om eleverna verkade förflytta sig naturligt mellan tankeprocesserna, använde eleverna inte alla kategorier för processerna i alla aktiviteter de blivit ombedda att göra tillsammans. Deras prestation påverkades av aktiviteternas innehåll, svårighetsgrad och elevernas förkunskaper inom matematik samt den sociala interaktionen och dess arbetsmiljö.

Detta ger ett behov att ställa ett par frågor. Den första är, om det är möjligt för eleverna i sitt tänkande att röra sig enbart mellan specialiseringen och gissningen utan att generalisera och övertyga? Behöver de förstå att det finns en löpande risk att de inte löser problemet korrekt?

Den andra frågan, hur påverkas dynamiken att lösa problemen om eleverna i sitt tänkande inte rör sig genom den spiralformade modellen som Burton (1984) förslog?

Med uppfattningen om matematiken som empirisk och fokus på elevernas upplevelser, då bör även undervisningens inriktning ändras (Li & Schoenfeld, 2019). Li & Schoenfeld (2019) hävdar att skiftet är från undervisning tänkt som "vad ska läraren göra" till undervisning tänkt som "vilka matematiska erfarenheter ska eleverna ha för att de ska utvecklas till kraftfulla tänkare?"

Li & Schoenfeld (2019) belyste vikten av att se matematik som en mänsklig aktivitet, genom att se till att den är meningsfull för eleverna så att den ska utveckla elevernas matematiska tänkande om idéer, snarare än att bara absorbera en uppsättning statiska och frånkopplade kunskaper och färdigheter. Varje elev kan uppleva matematik genom olika metoder och "egen" matematik som en mänsklig aktivitet (Li & Schoenfeld, 2019).

Utifrån denna studie, kan indikationer sägas framgångsrikt avslöja aspekter som påverkar elevernas användning av strategierna för tankeprocesserna. Dessa exempelvis grupper blandades utifrån olika prestationsförmåga (heterogen blandning). Nästa steg skulle vara att anpassa ramverket och aktiviteter till data från likapresterande grupper (homogena grupper) för att se om processerna kan upptäckas eller sekvenseras på samma sätt, även för att förstå hur påverkar det elevernas lärande.

Referenser

Ball, D., & Cohen, D. (1999). Developing practice, developing practitioners. In Darling-Hammond, L., Sykes, G. (Eds.), Teaching as the learning profession: *Handbook for policy and practice*, 3-32.

Barnhart, T. & van Es, E.A. (2015). Learning to analyze teaching: Developing pre-service science teachers' abilities to notice, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education, 45,* 83–93. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2014.09.005

Berliner, D. C. (1994). Expertise: The wonder of exemplary performances. In J. N. Margieri & C. C. Block (Eds), *Creating powerful thinking in teachers and students,* 161-186.

Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(1), 35–49. https://doi.org/10.2307/748986

Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 36,* 201–217. https://doi.org/10.1023/A:1003134323371

Elliott, J. (1994) Research on teachers' knowledge and action research. *Educational Action Research, 2*(1), 133–137, DOI:10.1080/09650799400200003

Feldman, A. (1993). Teacher learning from teachers: Knowledge and understanding in collaborative action research.

Feldman, A. (2002). Existential approaches to action research. *Educational Action Research. 10*(2), 233-252.

Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Fennema, E. (2001). Capturing teachers' generative change: A follow-up study of professional development in mathematics. *American educational research journal*, *38*(3), 653-689.

Gebhard, J. G., & Oprandy, R. (1999). Language teaching awareness: a guide to exploring beliefs and practices, 35-58.

Goos, M., & Kaya, S. (2020). Understanding and promoting students' mathematical thinking: a review of research published in ESM. *Educational Studies in Mathematics*, *103*(1), 7-25.

Heino, K. (2015). Comparing multiple solutions in the structured problem solving: Deconstructing Japanese lessons from learner's perspective. *Educational Studies in Mathematics, 90*(2), 121–141

Isoda, M., & Katagiri, S. (2012). Mathematical thinking: How to develop it in the classroom (Vol. 1). World Scientific.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C., & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, 101–125.

Li, Y., & Schoenfeld, A. H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as "given" in STEM education. *International Journal of STEM Education*, *6*(1), 1-13.

Lynham, S. A. (2002). The General Method of Theory-Building Research in Applied Disciplines. *First Published August 1*, *4*(3), 221-241. https://doi.org/10.1177%2F1523422302043002

Mason, J. (2002). Researching Your Own Practice. The Discipline of Noticing. *First edition.* Routledge

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2010). Thinking mathematically. *Second edition*. Edinburgh: Pearson

Mata-Pereira, J., & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics. 96* (2), 169–186.

Polya, G. (1973). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334–370.

Sfard, A. & Kieran, C (2009). Cognition as Communication: Rethinking Learning-by-Talking Through Multi-Faceted Analysis of Students' Mathematical Interactions. *Educational Journel, 8*, 42-76 https://doi.org/10.1207/S15327884MCA0801_04

Stacey, K. (2006). What is mathematical thinking and why is it important? University of Melbourne, Australia. Januari 2006, 39–48

Stacey, K. (2015). Mathematical thinking for classroom decision making. In Lesson Study: Challenges in Mathematics Education, 11-25.

Varhol, A., Drageset, O. G., & Hansen, M. N. (2021). Discovering key interactions. How student interactions relate to progress in mathematical generalization. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(2), 365-382.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education: An International Journal of Research and Studies*, *24*(2), 244 - 276. https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.11.005

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2021). Expanding on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(1), 17-27.

Webb, N. M., Franke, M. L., Johnson, N. C., Ing, M., & Zimmerman, J. (2021). Learning through explaining and engaging with others' mathematical ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-27.

Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's Mathematical Thinking in Different Classroom Cultures. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(3), 222–255. http://www.jstor.org/stable/30035059

Stockholms universitet/Stockholm University

SE-106 91 Stockholm

Telefon/Phone: 08 – 16 20 00

www.su.se