

”Det blir lika med...”

En studie om hur elever i en årskurs 4
resonerar kring likhetstecknet

Emmi Kouri

Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik

Självständigt arbete inom allmänt utbildningsområde: inriktning, UM6002

Vårterminen 2010

Examinator: Lena Renström

Handledare: Carolina Svensson-Huldt

English title: "It's going to equal to..." – A study of how pupils in 4th grade reasons about the equal sign



Stockholms
universitet

”Det blir lika med...”

En studie om hur elever i en årskurs 4 resonerar kring likhetstecknet

Emmi Kouri

Sammanfattning

I denna studie undersöktes hur några elever i en årskurs 4 resonerar kring likhetstecknet. Undersökningen gjordes med hjälp av kvalitativa intervjuer. Eleverna var valda och placerade på måfå i grupper där de sedan fick diskutera kring tre matematiska likheter.

Studien visar på tendenser av relationell förståelse för likhetstecknet hos eleverna, men samtidigt problematiseras skillnaden mellan den relationella och den operationella förståelsen. Studien kommer fram till att eleverna diskuterar om uppgiftens konstiga utformning när operationen är på högra sidan av likhetstecknet och svaret är på den vänstra sidan. Eleverna hänvisar till kutym och läroböcker. Av studien framkommer det också att eleverna jämför likheterna ofta med balansvågen, både muntligt men också kroppsligt. Studien tenderar även att ge en bild av att elevers svar skiljer sig beroende på vilka uppgifterna är.

Nyckelord

diskussion, ekvivalens, likhet, likhetstecken, operationell förståelse, relationell förståelse, resonemang, språkspel, uppfattningar, Åk 4

Inledning	5
Metod och genomförande	6
Metod	6
Genomförande	7
Resultat	8
Likhet 1	8
Likhet 2	9
Likhet 3	11
Sammanfattande tanke	12
Diskussion	12
Läraren, undervisningen och läroböckerna	12
Balansvåg – konkret material?	13
Tvetydighet i tolkningen	13
Relationell eller operationell symbol?	14
Sammanhangets påverkan?	14
Tillförlitlighet	15
Avslutande ord	16
Referenser:	18
Litteratur:	18
Bilagor:	19
Bilaga 1	19

Inledning

Matematik uppfattas som ett svårt ämne bland annat p. g. a. elevernas svårigheter i att förstå språket och dess nyanser (Warren, 2006).

Att övergå från det aritmetiska till det algebraiska räknandet anses av många forskare vara svårt för eleverna. Eftersom algebra är viktigt för att utveckla det matematiska tänkandet och problemlösningsförmågan, är det av stort intresse att vara medveten om svårigheterna och därmed att kunna koncentrera sig på det viktiga, redan i de yngre åldrarna. En orsak till svårigheterna sägs vara att eleverna inte får tillräckligt med tid att se sambandet mellan pre-algebra och algebra (McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur & Krill, 2006); övergången från det konkreta till det abstrakta. Eleverna förstår inte vad bokstäverna står för och därmed blir räkningen enbart en meningslös procedur (Ibid.), något man måste för att det är så det går till i skolan. En annan orsak till svårigheterna sägs vara en för vag uppfattning av likhetstecknet. Eleverna ser likhetstecknet som en operationell symbol, som ett tecken på var svaret skall stå, istället för en relationell symbol som syftar på likhetens ekvivalens. (McNeil & Alibali 2005; Warren, 2006; Warren & Cooper, 2005).

Warren & Cooper (2005) gjorde en forskning i stil med Lesson Study¹ om hur elever² använder sig av balansvågen när de får ekvationer med obestämda variabler att lösa både i laborativt material samt skrivet material. Forskningen tydde på att undervisningen av balansvågen hjälpte en stor del av eleverna i att lösa både konkreta och abstrakta ekvationer, men att det även efter undervisningspassen fanns elever som inte såg likhetstecknet ur ett bredare perspektiv. I sin undersökning kom de också fram till att eleverna ville läsa ekvationerna $4 + 3 = 7$ även om uppgiften stod åt andra hållet ($7 = 4 + 3$).

Enligt Warren (2006) fokuserar klassrumsaktiviteterna i de tidiga åren på matematiska produkter istället för att fokusera på processer. Detta leder enligt henne till en snäv förståelse och feltolkningar av ekvationer i ett senare skede av skolgången. Enligt McNeil, m.fl. (2006) orsakas denna snäva förståelse av likhetstecknet av hur arbetsböckerna är konstruerade och därmed vilka övningar som eleverna får jobba med. Det finns också studier om att förståelsen är biologiskt betingad: Kieran (1981) förklarar svårigheterna med förståelsen av ekvivalens med ålder och med en saknad av abstrakt tänkande. Hon skriver att elever i de yngre åldrarna, oberoende vad undervisningen fokuserar på, ser likhetstecknet som en symbol som separerar problemet från svaret, som ett ”göra någonting- signal”³. Hon anser också att Name for a Number⁴-tanken inte är att

¹de förbättrade lektionerna flera gånger innan de körde dem på skolan där studien gjordes

²i den studien använde de sig av uttrycket *children* och skulle direkt översättas med ordet *barn*. Jag har dock valt att använda mig av *elever* genom hela arbetet.

³ Kieran (1981) använder sig av uttrycket ”do something signal”.

⁴ Name for a Number-idéen har sitt ursprung i en tanke där unga elever ska assimilera en syn på likhetstecknet som att den står för ekvivalens; båda sidorna är synonyma i relationen till varandra.

betrakta som något som eleverna i lågstadiet skall introduceras med, eftersom det ändå inte ger någon effekt. Ur hennes verk går också att läsa att en viktig gräns går vid 10 år; Eleverna mellan 6 och 10 år förstår inte likheter med operationer på båda sidorna, och att elever mellan 10 och 13 år börjar skapa en förståelse kring ekvivalensen. Detta blir synligt ex. genom att de inte längre nödvändigtvis behöver göra ett utbyte⁵ för att verkligen se likheten. (Collis enligt Kieran, 1981).

Av McNeil & Alibalis (2005) undersökning framgår det i stort att elevers förståelse, eller rättare sagt resonemang kring likhetstecknet förändras i takt med vilka frågor som ställs. Eleverna förklarar likhetstecknet mer operationellt då de enbart får se ett likhetstecken eller när likhetstecknet följs av ett ensamstående tal, som ett svar. Enligt McNeil & Alibali (2005) visade eleverna ett större kunnande då uppgifterna innehöll luckor på högra sidan av likhetstecknet ($4 + 2 = 5 + _$). Forskarna tog detta som ett bevis på att eleverna resonerar mer relationellt kring likhetstecknet om ekvationen har operationer på båda sidorna av likhetstecknet. I undersökningen med äldre elever ökade antalet svar som såg likhetstecknet som en relationell symbol i motsats till mellanstadieeleverna. Ju mer krävande och omfattande uppgifterna var desto fler av eleverna i åk 3 – 5 förklarade likhetstecknet som operationellt.

I kursplanen för matematik (Skolverket, 2000) står det under grundläggande kunskaper som alla i år 3 ska uppnå, att kunna hantera matematiska likheter inom heltalsområdet 0-20. I slutet av det femte skolåret ska alla elever kunna bestämma obekanta tal i enkla formler (Ibid). Jag har undervisat elever i de yngre åldrarna både under den verksamhetsförlagda utbildningen, men också under korta vikariat i Sverige och långa (3 år) i Finland. För att jag i mitt framtida yrke som lärare F - 3 kan förstå vikten av vad som ska undervisas, gör jag undersökningen i en årskurs 4. Uppnåendemålen för åk 3 och åk 5 ger mig tankar kring vad eleverna *ska* kunna, men vad är det eleverna visar på? Hur resonerar eleverna i en årskurs 4 kring likhetstecknet?

Syfte: Fördjupa samt utveckla förståelsen kring hur elever i en årskurs 4 tolkar likhetstecknet.

Frågeställning: Hur resonerar några elever kring likhetstecknet i en årskurs 4?

Metod och genomförande

Metod

Eftersom syftet var att fördjupa och utveckla uppfattningen kring hur eleverna tolkar likhetstecknet ansåg jag att en diskussion med eleverna själva skulle vara den bästa metoden. Istället för att jag

Tanken bygger på idén om att $4 + 5$ är ett annat namn för 9, och kan därmed användas. (Kieran, 1981).

⁵ Ex. $2 + 2 = 5 - 1$ behöver inte förenklas till $2 + 2 = 4$.

skulle intervjuva eleverna en och en, fick eleverna resonera tillsammans med varandra kring ett antal likheter.

Min önskan vara att eleverna inte skulle se mig som en vuxen som väntar på rätta svar, så att de inte skulle känna sig underordnade och försöka lista ut hur jag tänker, utan istället redogöra för sina egna tankar. Johansson & Svedner (2009) redogör för kvalitativa intervjuer och skriver bl.a. att dessa ska ha fasta frågeområden men inte fasta frågor, så att det uppstår en diskussion. Min forskning har bestått av fasta frågeområden i form av tre färdiga likheter, men däremot inga fasta frågor. Jag försökte ha en passiv, observerande roll, men jag gick in med frågor som *Hur menar du nu? Kunde man se på det på något annat sätt?* för att förtydliga eller fördjupa diskussionen.

Undersökningen gjordes i en åk 4 på en skola som enligt klassens lärare har högprioriterat likhetstecknets betydelse redan i de lägsta klasserna. Elevers tidigare erfarenhet kring likhetstecknet har inte beaktats, utan uppgifterna formade sig som en blandning och anpassning av uppgifter ur tidigare forskning (McNeil & Alibalis, 2005; McNeil, m.fl. 2006; Warren, 2006; Warren & Cooper, 2005). Det faktum att likhetstyperna var olika härstammade ifrån att jag ville se om, och i så fall hur elevernas resonemang skilde sig beroende på likheten. Dessutom, för att analysera och bearbeta själva diskussionerna, använder jag mig av Wittgensteins språkspel (Jakobson & Wickman, 2008).

Undersökningen skulle inkludera tolv elever, men p.g.a. en elevs insjuknad, ingick det endast elva elever i studien. Dessa elever var valda utifrån att föräldrarna meddelade sitt tillstånd till att eleverna skulle få delta (Över hälften av föräldrarna *glömde* att svara på frågeformuläret). Eleverna delades slumpmässigt in i fyra grupper, vilka intervjuades i tur och ordning. Diskussionerna i samtliga grupperna spelades in och transkriberades. I samband med transkriberingen fingerades elevernas namn, förutom I som står för intervjuaren.

Genomförande

Under denna studies gång har jag följt de forskningsetiska principerna (Repstad, 2007) bl.a. genom ett skriftligt tillstånd (Bilaga 1) från föräldrarna samt ett samtycke från de elever som ingick i studien. Undersökningarna gjordes i korridoren, utanför klassrummet. Korridoren är till enbart för denna klass, vilket gjorde att atmosfären var lugn. Eleverna fick till uppgift att diskutera kring vad de tänker på när de ser följande, utskrivna och laminerade, uppgifter:

- $6 = 4 + 2$
- $2 + 3 = 6 - 1$
- $_ + 4 = 7$

Till sitt förfogande kunde eleverna använda sig av papper och penna samt klossar, vilka var placerade på bordet intill dem.

Resultat

Det blev tydligt under själva genomförandet att eleverna snarare delgav sina egna tolkningar av likheterna än diskuterade med varandra. Detta medförde att resonemanget inte blev av sig självt fördjupande. I stort sett spanner eleverna inte vidare på varandras tankar, istället interagerade de i mindre skala genom yttringar som *Mmm* och *Just det!*.

Likhet 1

Den första likheten $6 = 4 + 2$ vållade till diskussioner kring ordningsföljden. En stor del av eleverna ifrågasatte ordningen av svar och operation och de berättade att uppgiften var konstig. Meningarna som eleverna framförde, resulterade i uppåtgående tonfall och kunde därmed tolkas som frågor. Följande två citat är utdrag från skilda intervjuer:

Johanna: Jaa, ja tänker att är den inte åt fel håll?

Klara: Men det står ju ett svar?!

En del av eleverna tog en lärarröst och påpekade åt sina gruppkamrater att de hade fel, när de tyckte att likheten var bakvänd. Följande är ett utdrag från en diskussion som pågick i grupp 2:

Evelina: Nää, de e inte åt fel håll. För de e sex som e lika mycket som fyra plus två o inte fyra plus två som är lika mycket.

Johanna: Ahaa, men e de då lika med?...

Evelina: Ja, för då har du sex från början istället för att ha fyra plus två från början. Fattar du?(placerar klossar i likadana högar samtidigt som hon förklarar).

Johanna: alltså först sex, o sen de blir likamed fyra plus två?...

Evelina: Mm, så du delar på det så då blir det ju fyra plus två (pekar på högarna).

(... tystnad 3 sek)...

Johanna: Jaaahaa, nuu fattar jag... Okej, mmm!

Vid frågan om varför eleverna tyckte att uppgiften såg konstig ut, syftade eleverna till kutymen, till något som är använt i böckerna eller till något som "lärs ut". Följande är enstaka utdrag ur diskussionerna.

Alva: Ja, man tänker såhär att fyra plus två är lika med sex...

Molly: Därför att man lär sig oftast så...

Evelina: Jag tycker, för det brukar ju vara att fyra plus två e likamed sex. Så...(bygger högar med klossar).

Jakob: Jag vet inte, för att de e hur de ser ut i böckerna o så, så blir jag van vid det.

Vissa elever var måna om att påpeka att de förstod likheten även om de berättade att den kändes konstig.

Jakob: Aaa, men jag har nog förstått det här. Men de brukar se mer ut såhär... (eleven skriver $4 + 2 = 6$).

Den första likheten genererade också i spontana utrop som syftade på likhetstecknets betydelse. Följande är ett utdrag från intervjun med grupp 1:

I: Vad tänker ni på när ni ser det här då?

Klara: Att det är lika mycket på båda sidorna!

Felix: Mmm. Just det!

Likhet 2

I diskussionerna kring likheten $2 + 3 = 6 - 1$ anknöt eleverna till en balansvåg.

I: Vad tänker ni nu då?

Molly: en våg, ungefär

I: Varför tänker du på en våg?

Molly: för... de e lika mycket på båda sidorna. De e fem o fem.

Samt

Stella: Jag tänker på att likamedtecknet, det betyder att det ska vara lika mycket på varje sida, liksom som en våg. Att det är liksom mitten på en våg.

Som Stella, menade även Oscar att likhetstecknet kunde liknas vid mitten av en våg. Följande är ett utdrag ur diskussionen i grupp 1:

Oscar: När jag ser det här talet så känner jag att det är liksom en femma här över likamedtecknet. Det känns så. Först så trodde jag att det satt här över..(pekar på den laminerade likheten).

I: Men varför tänkte du så? Eller jag menar, hur menar du då?

Oscar: Nä men, det kändes bara så.

Likheten alstrade också i spontana utrop och kroppsliga uttryck som syftade på att likheten såg ut som en balansvåg.

Molly: Det är fem på båda sidorna! Sex minus ett är lika med fem och två plus tre är lika med fem. Det är lika mycket på varje, på båda sidorna (eleven räcker ut händerna i luften och "väger" någonting i båda händerna).

Likheten resulterade även i en diskussion kring vad man skall betrakta som ett svar. Detta är ett utdrag från diskussionen i grupp 3. Eleverna diskuterade kring om man kan ha två svar, en på vardera sidan av likhetstecknet och om uppgiften var klar. Eleverna tog hjälp av egna påhittade tal, till exempel:

Klara: Så där står ju inte svaret på ena sidan liksom, för där står ju liksom (--)

Alva: Man kan ju säga att det blir två svar (skriver $2 + 3 = 5$ och nedanför $6 - 1 = 5$).

Felix: jaa, det blir så (pekar på högra leden i båda likheterna som Alva skrev)

Klara: Jaa, det är inte riktigt klart här (pekar på den ursprungliga likhetens högra led, alltså 6 – 1)

Alva: Jo, här står, här står.. (pekar på 2 + 3 och sedan 6 – 1). Jo alltså man har bara satt svaret på ett lite konstigare sätt.

Felix: Aa, typ.

Alva: Men i hela svaret, eller det står ju, men i hela svaret liksom i sig så står det ju inte..

Klara: Ja men man brukar ju sätta det så här (ritar $2 + 3 = 5$ samtidigt som Alva fortsätter)

Alva: Men om man, om vi skulle säga att fem minus noll e lika med fem, det står ju här, för att, det står ju sex minus ett.

Klara: aa.

Felix: typ.

Samtal kring likhetens utformning resulterade också i vad likhetstecknet betyder. Följande är ett utdrag från intervjun med grupp 2:

Evelina: Man tror att två plus tre e lika med fem om man bara ser det där, fast det är sex minus ett som e samma sak som fem

Johanna & Malte: Mmm.

Evelina: Så egentligen kunde det lika gärna stå fem e lika med fem

Malte: Men man kan kanske inte skriva det som fem e lika med fem

Johanna: Njaa, kanske inte

Evelina: Men varför skulle man inte bara kunna skriva det så?

Johanna: Aa, fast de e ju att man ska förstå mer, att de e lika mycket o inte att det blir, utan det ska vara lika mycket. För två plus tre, det blir ju inte sex minus ett, utan det är.

Samma elever resonerade också kring vad man får och vad man inte får göra mot ett likhetstecken:

Alva: För att man inte ska misshandla likhetstecknet.

Felix: Näj,(---)

Alva: Man ska liksom förstå vad likhetstecknet... mmmm... egentligen är.

Klara: Just det..

Eleverna i grupp 1 förklarade likheten även med egna fiktiva räknesagor som de tog eget initiativ till:

Jakob: Kan det vara en minisaga?

I: Jo, det kan vara en minisaga.

Oscar: Paulina har sex ägg o hon ger bort ett ägg. O då blir de fem!

I: Vad tycker ni andra om det?

Stella: Ääh, jag tycker att den va lite konstig. Jag har en bättre: Det var en gunga, o så satte sig två barn i den. o på andra sidan satte sig sex barn. O så fanns det tre andra barn i parken. O då

så, då ville dom att de skulle vara lika många på varje sida, så då så fick ett barn gå av från den sidan där det finns sex barn, o dom tre som finns i parken fick hoppa med på den sidan där det bara fanns två.

Oscar & Jakob: Mmm.

Likhet 3

Den sista likheten $_ + 4 = 7$ genererade i korta och koncisa svar. Eleverna ställde sig inte frågande i diskussioner kring uppgiften. Följande är ett utdrag från intervjun med grupp 4.

Nemo: tre

Molly: Mm.

I: Tänker ni på något annat då?

Molly: Nep

Nemo: Tre, att det ska stå tre där istället för luckan

Likheten resulterade också i diskussion kring själva operationen; Hur komma fram till tre. Följande citat är ur diskussion i grupp 3:

Klara: Titta! Om du får t.ex. det här talet, då vet man ju att det blir tre här, för tre plus fyra e lika med sju!

Alva: Då ska man försöka så här.. Tre plus fyra e lika med sju? Ett plus fyra, nej de e fem. Två plus fyra, neeej det e lika med sex. Här så, tre plus fyra e lika med sju.

Eleverna använde sig av förklaringar som innehöll begrepp som *lika mycket*, precis som i de andra uppgifterna. Däremot använde de sig också av ett annat begrepp; begreppet *blir*. Här ett exempel:

Oscar: Det här e sju, så du ser att du måste ha en trea där. För då blir det lika mycket där o där.

Likheten uppfattades enkel,

Klara: Väldigt väldigt väldigt väldigt enkelt!

I: Mm. O varför det?

Alva: Jo, för titta! Om man kan tre plus fyra...

Felix: hahhahhaa...

Alva: O det borde man ju lärt sig nu.. vid det här laget..

men i grupp 4 rådde det aningen tvivel kring om likheten kunde ses som en våg.

Molly: hehheh.. Jaa, Den e ju lite sådär oklar, eftersom det inte står nånting där... Men då får man ju tänka lite själv.. vad det blir

Nemo: mmm

I: Mmm. Nåt annat?

Molly: alla e... sådär... Det här behöver ju inte heller vara en våg.. Jooo, de e en våg, men..

Nemo: Men om man sku sätta en trea där (pekar på luckan) då blir den en våg som e i balans..

Orsaken till likhetens lätthet förklarades exempelvis i grupp 1 med att svaret redan fanns och även att man kan ta hjälp av det.

Stella: Först tar man sjuan, då vet man att de e svaret o sen kan man ju tänka så att fyra plus nånting, va det blir liksom, det blir ju sju.

Jakob: Det blir ju då lite enklare att lösa talet då...

Stella: För då vet man ju redan svaret.

Jakob: Mmm.

Sammanfattande tanke

I stort sett, som redan tidigare nämnts, verkade det som att eleverna medgav sina egna tolkningar av likheterna snarare än att de diskuterade med varandra. Detta medförde att resonemanget inte blev av sig självt fördjupande. Men vissa olikheter i diskussionerna kunde dock skådas; i diskussioner kring de två första likheterna avslutades många av meningarna som frågor och förklaringar, till skillnad från diskussionerna kring den sista likheten som genererade i korta svar.

I sina diskussioner använde sig eleverna mycket av resonemang kring kvantitativ likhet; ”Båda sidorna väger lika mycket”. Tankarna pendlade också kring uppgifters märkvärdiga yttre och dess bakomliggande orsak. Eleverna använde sig ofta av metaforer, som ex. ”som en våg”.

Diskussion

Denna studie gick ut på att ta reda på hur några elever i den valda klassen resonerar kring likhetstecknet. Studien visar tendenser på att eleverna har en tydlig och klar bild av likhetstecknet. Detta kunde skådas genom att eleverna beskrev likhetstecknet med hjälp av metaforer, såsom våg. Dessutom visade studien i stort att det fanns en skillnad kring hur diskussionerna formade sig beroende på vilken likhet som visades åt dem.

Läraren, undervisningen och läroböckerna

I min tolkning av elevernas diskussioner får läraren och undervisningen en stor roll. Många elever jämförde likhetstecknet med en balansvåg. I grupp 1 engagerade eleverna sig till den grad att de ville göra egna räknesagor till en av uppgifterna. Detta tolkade jag som en vana som eleverna bar på, något de till vardagen också får göra som ”det roliga” samtidigt som uppgiften alstrade i en djupare förståelse; ex. Stellas jargong kring en gungbräda (se under uppgift 2). Hennes räknesaga kunde ses som en antydning på att hon uppfattar likheten som en ekvivalens; en balansvåg; en gungbräda. Ett annat exempel som tyder på att undervisningen har stämplat elevers kunskaper kring likhetstecknet är att flera elever använde sig av uttrycket *att misshandla likhetstecknet* vilket jag tolkade som att eleverna vet vad likhetstecknet betyder. Detta strider mot Kierans (1981) tankar om hur elever förstår likhetstecknet genom hela lågstadiet, eftersom hon anser att elevers tolkning av

likhetstecknet är enbart ett ”göra någonting-signal” och att det inte har en koppling med tidigare erfarenhet. Speciellt tänkvärt är att samtliga elever ur intervjuerna befinner sig i åldersgruppen; 9 – 10 år. Detta jämfört med påståendet om elever mellan 6 och 10 år inte har kunskap om betydelsen av operationer på båda sidorna och att elever först mellan 10 och 13 år börjar skapa den förståelsen (Collis enligt Kieran, 1981), blir ytterst intressant; Är denna klass en exceptionellt begåvad klass eller rutinerat inövad? (Ordens *begåvning* och *rutiner/övning* betydelse är enligt Kieran obetydliga, eftersom kunskap har att göra med den biologiska åldern).

Ur intervjuerna kan alltså tolkas att elevernas tankar ofta var influerade av undervisningen och läraren, men också särskilt, av läroböckernas innehåll; de är de eleverna sist och slutligen refererade till. Eleverna förklarade självmant uppgifternas konstiga utseende med att de aldrig ser ut så i arbetsböckerna. Detta stämmer väl överens med McNeil, m.fl. (2006) teori om att arbetsböckernas utseende och innehåll påverkar elevernas förståelse kring likhetstecknet. Om uppgifterna i boken är skrivna med operationen på vänstra sidan och svaret på högra sidan, resulterar det i elever som anser uppgifter med operationen på högra sidan av likhetstecknet se *bakvända ut*. Warren & Coopers forskning (2005) gav som en slutsats att eleverna hellre läste ut likheterna med operationen på vänstra sidan och svaret på högra sidan, även om likheten var skriven åt andra hållet. Detta sammanfaller även med elevernas resonemang kring den första likheten; den såg konstig ut för att man brukar skriva det andra vägen. Intressant skulle det vara att undersöka om och hur läroböcker respektive undervisning påverkar elevernas resonemang och vilket eventuellt som väger mer. Det skulle naturligtvis kräva en bredare forskning med kontrollgrupper och mer material.

Balansvåg – konkret material?

Många av eleverna jämförde, som förut nämnts, likhetstecknet med en balansvåg. Av diskussionerna framgick det inte direkt, men kunde läsas mellan raderna att eleverna hade introducerats med balansvågen redan tidigare i matematikundervisningen. Eleverna verkade vana vid att förklara likheter med ”att det väger lika mycket” samt använda sig av vågen och små klossar. Warren & Coopers (2005) slutsats om att en konkret balansvåg kunde hjälpa en stor del elever, verkar stämma överens med denna studie, i och med att eleverna kommer ihåg liknelsen så bra. Engagemang är otroligt betydelsefullt och det kan hända att det har uppstått i samverkan med konkret material. Dessutom är det viktigt att komma ihåg att en del elever kan sakna en slags verbal förmåga och känner sig starkare på att uttrycka sig kroppsligt. Då är det essentiellt att man har konkret material, som kan uppfattas enklare att förklara kroppsligt än muntligt. Som ett exempel fungerar Molly; Hon visade balansvågen med händerna, samtidigt som hon sade att ”*det är lika mycket*”. Om hon aldrig hade tänkt på likhetstecknet som en våg, verkar det osannolikt att hon hade använt sig av det kroppsliga uttrycket för att väga.

Tvetydighet i tolkningen

Att eleverna förklarade likheterna som ekvivalenser blev som sagt uppenbart av denna undersökning. Däremot ställer jag mig frågande gentemot hur djup deras ekvivalensförståelse egentligen är. Den andra uppgiften resulterade exempelvis i diskussioner kring om man kan förenkla likheten till $5 = 5$ och om det är acceptabelt. Alva visade muntligt och med papper och

penna på att det är det samma som $2 + 3 = 6 - 1$, Evelina likaså. Ett fascinerande fenomen är att eleverna verkade förstå synonymtanken i likheter, i motsats till alster ur Kierans verk (1981). Enligt henne visar eleverna på en "Name for a Number"-förståelse då de inte längre behöver utbyta likheten mot en likhet med operationen på vänstra sidan och svaret på högra sidan. Frågan uppstår; Skulle Kieran tolka Evelinas och Alvas förklaringar som att de förstår ekvivalenser, eller inte? Min tolkning är att dessa elever "äger" förståelsen. Samtidigt är det svårt att antyda om de andra, som svarade med *Ja*, *Aa* eller *Mmm* också tänkte i samma banor. Som exempel kunde Johannas fortsättning på Evelinas resonemang fungera;

Johanna: Aa, fast de e ju att man ska förstå mer, att de e lika mycket o inte att det blir, utan det ska vara lika mycket. För två plus tre, det blir ju inte sex minus ett, utan det är.

Att Johanna använder sig av "*Aa, fast...*" kunde både tolkas som att hon håller med Evelina och att hon vill poängtera det viktiga, men också som ett uttryck för att hon vill bygga vidare på det den föregående sade. Det fungerar dock inte som en garanti på att hon håller med; hon kanske enbart ville visa att hon har lärt sig att likhetstecknet står för *är* och *inte blir*. Det blir nästan omöjligt att nu, i skrivande stunden att analysera vad som låg i bakgrunden till Johannas sätt att uttrycka sig; Slumpen eller tanken?

Relationell eller operationell symbol?

Med begreppen relationellt och operationellt (McNeil & Alibali, 2005; Warren, 2006; Warren & Cooper, 2005) kunde man tolka resultaten som att en stor del av eleverna som ingick i studien samtalade kring likhetstecknet som en relationell symbol; de hänvisade till balansvågen vilket tyder på att eleverna tolkade likhetstecknet som en symbol för ekvivalens. Däremot kan jag inte låta bli att grubbla över, om inte rätt så många av eleverna ändå ser likhetstecknet som en operationell symbol. Deras sätt att presentera meningarna som frågor kunde nämligen tolkas som en osäkerhet, en tvekan. Eller också kan det vara så att eleverna har stundtals en relationell förståelse av likhetstecknet och stundtals en operationell förståelse. Frågan som uppkommer då, är hur skall undervisningen formas för att på bästa möjliga sättet utveckla elevers förståelse?

Intressant var hur Molly och Nemo resonerade kring den sista uppgiften. Molly uttryckte sig med att likheten inte nödvändigtvis behövde vara en våg, men tog tillbaka det efter en kort paus. Varför gjorde hon det? Tvivlade hon på betydelsen av likhetstecknet, eller syftade hon på att ifall man skriver fel tal istället för luckan, ja då kan man inte kalla likheten för en balansvåg som är i balans? Det är svårt att avgöra den sanna bakomliggande tanken eftersom det enbart är Molly, i just den stunden, som vet vad hon menade.

Sammanhangets påverkan?

De två första likheterna styrde diskussionen till uppgifternas utformning och innehåll, snarare än på en procedur. Däremot blir det en obesvarad fråga om den sista uppgiften genererade i operationellt tänkande enbart för att likheten innehöll en lucka ($_ + 4 = 7$), eller att likheten hade en procedur på vänstra sidan av likhetstecknet, efterföljt med ett svar på högra sidan. Troligt är att det förstnämnda styrde mer, men det är inte bevisat. Styrde likheterna sist och slutligen elevers förmåga att se likhetstecknet som en ekvivalens, eller bar de på tanken redan innan? Skilde sig elevernas

diskussioner p.g.a. att de såg den sista likhetens ($_ + 4 = 7$) tomma lucka som en uppmaning att *fylla i*, eller var det *uppgiftens upplägg* (operation på vänstra sidan och svaret på högra) som orsakade att de automatiskt ville räkna uppgiften? Vilken än må vara den styrande kraften, kan jag tolka resultaten till att McNeil & Alibalis (2005) slutsats om att resonemangen styrs av frågorna som ställs sammanfaller med min studie; I diskussionerna kring de två första likheterna kunde inga spår av operationellt tankesätt tydas, inga *blir* uttrycktes. De *blir* som visade sig i samband med den sista uppgiften, kunde också enbart tolkas som elevens användning av sitt ordförråd; inte som ett sätt att uttrycka likhetstecknet betydelse. Samtidigt kunde *blir* tolkas som en slags formulering som har en helt annan innebörd än den jag uppfattar det som. Detta kunde även hänvisas till och reflekteras med hjälp av Wittgensteins (Jakobson & Wickman, 2008) språkspel. Wittgenstein menar, enligt Jakobson & Wickman (2008) att man inte lär sig genom att härma själva orden, utan orden får sin betydelse av hur de används. Betydelsen finns i sammanhanget, inte i själva ordet. Beroende på uppgiften (språkspelet) betyder likhetstecknet *blir* i ett sammanhang, och *ekvivalens* i ett annat. Därmed är det förståeligt att många av eleverna använde sig både av *misshandling av likhetstecknet* och *blir lika med*.

Tillförlitlighet

Enligt Svedner & Johansson (2009) ska man bedöma resultatens generaliserbarhet och tillförlitlighet. I vilka avseenden är studien tillförlitlig och var finns det brister? Eftersom syftet med studien var att fördjupa förståelsen kring hur barn tolkar likhetstecknet, är det också en tolkning jag gör av den insamlade datan. Att generalisera de tolkningar gälla för alla barn i årskurs 4 i hela riket är alltså inte att föredra. Man kan inte bortse från kontextens påverkan på de resultat som presenteras. Kontexten i denna studie är att klassen som intervjuerna gjordes i, hade som bakgrund en undervisning som betonade likhetstecknet och dess innebörd.

Det är också viktigt att kritiskt granska och överväga metoderna. Metoden som jag valde för denna studie dvs. kvalitativa intervjun kändes även efteråt som en passande metod. Eleverna berättade för varandra hur de tänkte, både genom att muntligt förklara men även med hjälp av laborativt material. Eleverna verkade sällan utmanade i den bemärkelsen att de tyckte att någonting var svårt, eventuellt eftersom, som de själva uttryckte det: ”det är såå enkelt!”. Det kan med fördel ses som en intressant faktor, eftersom eleverna ändå uttryckte sig med frågor istället för konstateranden.

I tanke på metoden och dess reliabilitet och validitet är det också värt att beakta dilemmat med intervjuer och hur själva intervjusituationen kan påverka elevens svar. Hur kan man veta att det de intervjuade säger är något de verkligen också tänker? – Det kan man inte, eftersom en intervjusituation kan bestå av flera olika (omedvetet) förutfattade meningar; De intervjuade uttrycker sig i enlighet med vad de tror att intervjuaren förväntar sig av dem. Samtidigt kan intervjuaren tro sig veta vad de intervjuade menar med det de säger. Dessutom borde man som intervjuare och analyserare kunna ta hänsyn till tanken om Wittgensteins språkspel; Ordens betydelse bildas i stunden. I detta arbete är även denna problematik en huvudorsak till att forskningsfrågan är preciserad till att undersöka *hur elever resonerar?* istället för hur elever förstår. En fråga som uppstår då; Hur kan man någonsin veta vad en annan menar? Hur kan missuppfattningar kringgås?

Även om metoden skulle vara en annan, exempelvis enkätfrågor skulle situationen med tolkningar, missuppfattningar och förväntningar fortfarande kvarstå; De som svarar på frågorna försöker svara så "rätt" som möjligt, kanske inte alls så som de egentligen tänker. Enligt Johansson & Svedner (2006) är risken stor att en enkätstudie uppfattas som ett prov. Dessutom, att be eleverna att skriva ner sina tankar skulle högst antagligen ha medfört korta svar som inte hade gett utrymme för tolkningar av de intervjuades kroppsspråk, resonemang samt diskussion. En annan viktig aspekt är att fråga sig, om alla elever ens förstår uppgiftens natur. Vad betyder *att berätta och sedan diskutera*? P.g.a. den valda metoden kan jag inte påstå att det jag kommit fram till är den exakta sanningen, utan enbart en tolkning av det som visade sig; inte en tolkning av hur barnen uppfattar likhetstecknet utan ett försök till en sammanfattning av det som kom fram i dessa intervjuer.

Avslutande ord

Syftet med denna studie var att skaffa en djupare förståelse av hur eleverna tolkar likhetstecknet. Elevers, barnens, enskilda individers uppfattningar är närmast omöjliga att som en observatör veta och förstå, men även en tolkning kan bidra till en ökad förståelse samt ett steg närmare till att bättre samverka. Av denna studie kommer jag att bära med mig tanken över hur olika frågor kan generera annorlunda svar samt vikten av att använda konkret material i undervisningen, eftersom det förkroppsligade tycks fastna i elevers minne. Speciellt nära mitt hjärta kommer jag att bära bilden av en balansvåg, och lära mina elever från första början betydelsen av likheter; att båda sidorna väger lika mycket. Kanske kommer någon av mina elever att förgylla min dag genom att uttrycka sig som Stella:

Jag tänker på att likamedtecknet, det betyder att det ska vara lika mycket på varje sida, liksom som en våg. Att det är liksom mitten på en våg.

Referenser:

Litteratur:

Jakobson, B., & Wickman, P-O. (2008). Art in science class vs science in art class. A study in elementary school. *Education & Didactique*, 2, s. 141-157.

Johansson, B. & Svedner, P. O. (2006). *Examensarbetet i lärarutbildningen: Undersökningsmetoder och språklig utformning*. Uppsala: Kunskapsföretaget

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics* 12, s. 317-326.

McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2005). Knowledge Change as a Function of Mathematics Experience: All Contexts are Not Created Equal. *Journal of Cognition and Development*, v 6 n2, s. 285-306.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur S. & Krill, D. E. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. *Cognition and Instruction*, v24 n3 s. 367-385.

Repstad, P. (2007). *Närhet och distans- kvalitativa metoder i samhällsvetenskap*. Uppsala: Studentlitteratur

Skolverket (2000). *Grundskola. Kursplaner och betygskriterier 2000, matematik*. Hämtad från: <http://www.skolverket.se> (2010-22-04)

Warren, E. & Cooper, Tom J. (2005). Young Childrens Ability to use the Balance Strategy to solve for unknowns. *Mathematics Education Research Journal* v17 n1, s.58-72.

Warren, E. (2006). Comparative Mathematical Language in the Elementary School: A Longitudinal Study. *Educational Studies in Mathematics*, v62 n2, s. 169-189.

Bilagor:

Bilaga 1

Stockholm mars 2010-03-29

Till föräldrar i klass 4 på ---skolan

Jag heter Emmi Kouri och studerar andra året på lärarhögskolan (Stockholms Universitet). Min utbildning heter Matematik och lärande, F – 6 och jag skall skriva mitt självständiga examensarbete på grundnivå. Till arbetet hör en liten undersökning. Min undersökning kommer att fokusera sig på barn och deras uppfattningar kring likhetstecknet. Barnen kommer att väljas ut slumpvis, vilket betyder att alla inte kommer att vara med i själva undersökningen.

Undersökningen kommer att göras som intervjuer/diskussioner med laborativt material som underlag. Intervjuerna kommer att spelas in, så att jag sedan kan transkribera materialet hemma. Jag kommer inte att sätta ut barnens namn, lärarnas namn eller skolans namn i min rapport. Ingen kommer att kunna lista ut vilken skola eller vilka barn som varit med i undersökningen. Barnen kommer inte att bli fotograferade, men det de skriver kommer däremot att sparas samt fotograferas.

Behöver ni fråga något, så kontakta mig gärna!

emmi.kouri@gmail.com eller 0761-88 40 12

Med vänlig hälsning

Emmi Kouri

Vänligen sätt ett kryss i någon av rutorna nedan och skicka tillbaka lappen påskrivnen till Malin eller Minna senast onsdag 7 april.

Får ditt barn delta i denna undersökning?

Ja Nej

Målsman _____ för _____ Eleven